



Diffraction électromagnétique par la surface océanique : influence des nonlinéarités et de l'écume

Frederic Nougier

► To cite this version:

Frederic Nougier. Diffraction électromagnétique par la surface océanique : influence des nonlinéarités et de l'écume. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Paul Cézanne (Aix Marseille III), 2009. Français. NNT : 2009AIX30020 . tel-01278732

HAL Id: tel-01278732

<https://hal.science/tel-01278732>

Submitted on 24 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2009AIX30020

Année 2009

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE (AIX-MARSEILLE III)
DISCIPLINE : ONDES

par

Frédéric NOUGUIER

Institut Fresnel (UMR CNRS 6133)

&

Laboratoire d'Océanographie Spatiale - IFREMER

École doctorale de Physique et Sciences de la Matière

*Diffraction électromagnétique par la surface océanique :
influence des nonlinéarités et de l'écume.*

Directeurs de thèse : Charles-Antoine GUÉRIN & Bertrand CHAPRON

Soutenue publiquement le 18 Septembre 2009 devant la commission d'examen :

MM. :	D. R.	THOMPSON	Rapporteur
	C.	BOURLIER	Rapporteur
	C.-A.	GUÉRIN	Directeur de thèse
	B.	CHAPRON	Codirecteur de thèse
	H.	GIOVANNINI	Examineur
	Y.	HURTAUD	Correspondant DGA

Financement : DGA / CNRS

Un ome a travessa lou mounde...

*E tant liuen es ana sus li camin de terro
O li camin de mar
Que cujavo belèu d'avera l'autre bord dóu cèu,
Lou bord mounte lou tèms cabusso e pièi s'envèssò,
Mounte l'astrado se reviro, inacoumplido,
En reprenènt soun ande de rebous...*

*Mai l'ome avié óublida que lou mounde es redoun,
Que tóuti li camin se ié croson,
Que l'on fai que vira
Dins lou ciéucle di jour, di semano e dis an
E qu'on trepo toujours dins li mémi roudan
Pèr de-longo tourna mounte l'on es parti...*

Un ome a travessa lou mounde...

— Jan-Calendau VIANÉS, *Dins lou tèms que trantraio*

Remerciements

Mes plus vifs remerciements vont évidemment à Charles-Antoine Guérin. Pour sa disponibilité, son encadrement scientifique exemplaire et ses qualités humaines qui ont permis le parfait déroulement de ma thèse dans une ambiance amicale. Je le remercie également pour son entrain et sa gaieté qui ont su rendre agréables tous les moments passés ensemble à Marseille, Toulon, Brest ou Boston.

Je remercie également Bertrand Chapron pour tous ses précieux conseils et les nombreuses discussions scientifiques qui y sont pour beaucoup dans l'originalité de ce document. Quelques unes de ses remarques encourageantes comme « *C'est super!, c'est nul!* » ou encore « *Excellent, tout est faux!* » ne peuvent pas ne pas être mentionnées.

Enfin, je les remercie tous les deux pour m'avoir transmis le goût du savoir et de la curiosité scientifique.

Je remercie Christophe Bourlier, Hugues Giovannini, Yvonick Hurtaud et Gabriel Soriano pour tous leurs conseils et pour l'intérêt qu'ils ont pu porter à mes travaux tout au long de ma thèse ainsi que durant la soutenance. I want to thank Donald R. Thompson for his precious advices, for courageously reading a French thesis and for the great interest he took in my work. Je remercie également les permanents du troisième étage et plus particulièrement Nicolas Bonod, Boris Gralak, Gérard Tayeb, Anne Sentenac et Guillaume Maire pour tous les agréables moments que nous avons passés.

Je ne saurais oublier tous mes amis qui m'ont accompagné durant ces trois années et bien avant encore. Je pense bien sûr à Fabien [*Ma poule*], Samuel [*Samy*], Daniel, Simon, Nicolas, Benjamin, Yves, Luiza, Elodie, Marion, Raphaël & Raphaël, Thierry [*Titi*], Nicolas [*Nounours*], Stéphanie, Sébastien, Pierre, Coralie, Nico [*Lalonde*] et tout ceux que j'ai oubliés. Merci pour toutes ces expériences vécues ensemble, et qu'il y en ait encore de nombreuses autres.

Também quero agradecer muito à minha namorada brasileira que me ajudou durante esses trêz últimos anos e me colocou essa vontade maluca de atravessar o oceano para ela. Obrigado Camila.

Un grand merci également à ma p'tite sœur et mon frangin pour toutes les années passées ensemble sous ce même toit de Provence.

Enfin, je voudrais remercier profondément mes parents qui m'ont toujours encouragé dans la poursuite de mes études. Pour leur patience, leur soutien et leur dévouement inconditionnels durant toutes ces années. J'espère que cette thèse que je leur dédie saura être à l'image des attentes qu'ils avaient placées en moi. Encore merci.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Table des figures	ix
Introduction	1
I Modélisation hydrodynamique	5
1 Description hydrodynamique	7
1.1 Equations du mouvement	7
1.1.1 Approche Eulérienne	7
1.1.2 Approche Lagrangienne	8
1.2 Modèle linéaire et “Choppy Wave Model”	11
1.2.1 Description linéaire	11
1.2.1.1 Statistique de premier ordre	12
1.2.1.2 Le spectre de la mer	12
1.2.2 Le “Choppy Wave Model”	15
1.3 Comparaison du “Choppy Wave Model” avec les modèles existants	16
1.3.1 Développement de Stokes	16
1.3.2 Théorie de Longuet-Higgins	17
2 Etude statistique des processus nonlinéaires	19
2.1 Description statistique des surfaces nonlinéaires 2D	19
2.1.1 Hauteurs	19
2.1.2 Pentes	21
2.2 Description statistique des surfaces nonlinéaires 3D	22
2.2.1 Hauteurs	22
2.2.2 Pentes	24
3 Spectres	29
3.1 Calcul du spectre habillé	29
3.2 Déshabillage de spectre	36
4 Processus temporel	39

4.1	Statistique de premier ordre	39
4.2	Spectre temporel	40
5	Génération de surfaces aléatoires	43
5.1	Surfaces figées	43
5.2	Evolution temporelle	49
II	Modélisation électromagnétique	53
6	Diffraction par des surfaces rugueuses	55
6.1	Modélisation et définitions	55
6.2	Diffraction dans l'approximation de Kirchhoff	57
6.2.1	Cas d'une surface Gaussienne	58
6.2.2	Cas d'une surface non - Gaussienne	58
6.3	Implémentation numérique et résultats	59
6.3.1	Calcul de la fonction de corrélation et de ses dérivées	59
6.3.1.1	Fonction de corrélation des hauteurs	60
6.3.1.2	Dérivées de la fonction de corrélation	60
6.3.2	Calcul de l'intégrale de Kirchhoff	61
6.3.2.1	Cas Gaussien	61
6.3.2.2	Cas non-Gaussien	62
6.3.2.3	Résultats et interprétations	62
6.4	Optique Physique et Optique Géométrique	67
6.4.1	Approximation haute fréquence d'Optique Physique	67
6.4.2	Influence des nonlinéarités sur les diagrammes de diffusion	69
6.5	Calcul de l'émissivité	73
6.5.1	Emissivité et difficultés	73
6.5.2	Approximation de Kirchhoff et méthode des petites perturbations	73
6.5.2.1	Formule des convolutions radiales	74
6.5.2.2	Application au calcul de l'émissivité	76
6.5.3	Résultats numériques	77
7	Prise en compte de l'écume	81
7.1	Description de l'écume	81
7.1.1	Modélisation d'une parcelle d'écume	81
7.1.2	Description électromagnétique	82
7.1.3	Contribution de l'écume	84
7.2	Effet sur la NRCS totale	85
7.2.1	Approximations	85
7.2.2	Modèles existants	86
7.2.3	Résultats numériques	87

Conclusion générale	91
Annexes	93
A Processus Gaussiens et propriétés	95
A.1 Représentation spectrale	95
A.1.1 Spectre et surface figée	95
A.1.2 Corrélation de processus Gaussiens	96
A.2 Propriétés générales	96
B Calculs statistiques des processus non Gaussiens	99
B.1 Moments des élévations. Cas 2D	99
B.2 Pdf des élévations. Cas 2D	100
B.3 Pdf des pentes. Cas 2D	100
B.4 Pdf des courbures. Cas 2D	102
B.5 Moments des élévations. Cas 3D	103
B.6 Pdf des élévations. Cas 3D	104
C Développements	105
C.1 Fonctions de corrélation et dérivées	105
C.2 Développement d'optique physique	107
D Noyaux et coefficients de Fresnel	109
D.1 Noyaux	109
D.1.1 Noyau de Kirchhoff	109
D.1.2 Noyau de Bragg	110
D.2 Coefficients de Fresnel	110
D.2.1 Dioptré	110
D.2.2 Bi-couche	111
Communications scientifiques et bibliographie	113
Communications scientifiques	115
Congrès	115
Publications	115
Nouguier, F., C.-A. Guérin, and B. Chapron, J. Geophys. Res. - Oceans	117
Nouguier, F., C.-A. Guérin, and B. Chapron, J. Geophys. Res. - Oceans	133
Bibliographie	148

Table des figures

1.1	Evolution temporelle des particules d'eau pour la vague de Gerstner.	10
1.2	Spectre omnidirectionnel d'Elfouhaily pour différents vents.	13
1.3	Courbure omnidirectionnelle du spectre d'Elfouhaily pour différents vents. . . .	13
1.4	Fonction d'étalement du spectre d'Elfouhaily pour différents vents.	14
2.1	Comparaison de la pdf des élévations du CWM avec la distribution de Tayfun. . .	21
2.2	Distribution des pentes de Cox & Munk et celle du CWM.	23
2.3	Distribution des pentes du modèle Gaussien et du CWM.	25
2.4	Excès de kurtosis des pentes omnidirectionnelles comme fonction du vent. . . .	27
3.1	Courbure directionnelle d'Elfouhaily et sa version habillée ($U_{10} = 11 \text{ m.s}^{-1}$). . .	32
3.2	Courbure omnidirectionnelle et fonction d'étalement d'Elfouhaily et leur version habillées ($U_{10} = 11 \text{ m.s}^{-1}$).	33
3.3	Comparaison des développements basse fréquence des corrections au spectre déshabillé de Creamer, Weber & Barrick et CWM.	36
3.4	Procédure d'habillage ($U_{10} = 11 \text{ m.s}^{-1}$).	37
3.5	Courbure et fonction d'étalement habillées et déshabillées pour différents vents. .	38
4.1	Distribution des pentes temporelles $\partial_t \tilde{h}$ du CWM.	41
5.1	Surface linéaire N° 1.	44
5.2	Surface nonlinéaire N° 1.	44
5.3	Surface linéaire N° 1.	45
5.4	Surface nonlinéaire N° 1.	45
5.5	Surface linéaire N° 2.	46
5.6	Surface nonlinéaire N° 2.	47
5.7	Surface linéaire N° 3.	48
5.8	Surface nonlinéaire N° 3.	48
5.9	Evolution temporelle d'une surface de mer 2D. $\Delta t = 0.1 \text{ s}$	49
5.10	Evolution temporelle d'une surface de mer 3D linéaire.	50
5.11	Evolution temporelle de la surface de mer 3D nonlinéaire correspondante. . . .	51
6.1	Géométrie du problème de diffraction.	56
6.2	Diagrammes monostatiques à différentes bandes, angles d'incidence et vents. . .	64
6.3	Diagrammes bistatiques à différentes bandes, angles d'incidence et vents. . . .	65
6.4	Diagrammes azimutaux à différentes bandes, angles d'incidence et vents. . . .	66
6.5	Régression quadratique d'un diagramme de Kirchhoff.	70
6.6	σ_2 total fonction des valeurs filtrées $\bar{\sigma}_2$. Cas Gaussien et non Gaussien. . . .	71
6.7	Erreur systématique faite sur σ_2 due aux nonlinéarités.	71
6.8	σ_4 total fonction des valeurs filtrées $\bar{\sigma}_4$. Cas Gaussien et non Gaussien. . . .	72

6.9	Erreur systématique faite sur σ_4 due aux nonlinéarités.	72
6.10	Comparaison du calcul direct avec la méthode des convolutions radiales.	77
6.11	Comparaison du calcul direct avec la méthode des convolutions radiales.	78
6.12	Diagramme de diffusion 3D. $U_{10} = 4 \text{ m.s}^{-1}$ et $\lambda = 20 \text{ cm}$	79
7.1	Géométrie du problème de diffusion.	82
7.2	Géométrie d'une parcelle d'écume.	83
7.3	Couverture d'écume en fonction du vent de <i>Monahan and Muircheartaigh [1980]</i>	88
7.4	Influence de la distribution des pentes sur la contribution de l'écume.	89
7.5	Surface équivalente radar de l'écume sur la NRCS en Bande C.	90

Introduction

Notre étude s'insère dans le cadre des problèmes de diffraction électromagnétique par la surface océanique qui est un problème particulier des surfaces rugueuses aléatoires. Elle s'appuie sur les connaissances acquises depuis les anciennes théories classiques (Rayleigh, Kirchhoff) développées pour des problèmes d'acoustique. La théorie de [Rayleigh \[1896\]](#) rebaptisée méthode des petites perturbations ou théorie de Bragg dans la communauté des océanographes ainsi que l'approximation dite du Plan Tangent ou approximation de Kirchhoff ([Beckmann and Spizzichino \[1963\]](#)) sont les méthodes les plus anciennes et probablement les plus utilisées. Ayant des domaines de validité différents elles permettent d'interpréter la plupart des résultats de diffraction par des surfaces rugueuses. Pour traiter le cas particulier de la mer qui présente de nombreuses échelles spatiales, des approximations hautes fréquences ([Valenzuela \[1978\]](#)) ou des méthodes dites à deux échelles ([Wright \[1968\]](#)) ont été développées plus tard. Ces méthodes sont encore utilisées aujourd'hui par toute la communauté des océanographes pour l'interprétation de données radar.

De nombreux progrès ont été faits depuis sur les méthodes approchées pour modéliser le phénomène de diffusion électromagnétique sur des surfaces rugueuses. La prise en compte de phénomènes complexes comme la diffusion multiple et la courbure locale de la surface sont à la base des principales améliorations de ces méthodes. Le besoin d'une description plus complexe de l'interaction onde-surface et de la surface elle-même s'est rapidement fait ressentir. Les principales améliorations ont été faites en prenant graduellement en compte la dépendance fréquentielle, la polarité de l'onde, la permittivité locale, les angles d'incidence et bien sûr des propriétés géométriques de la surface (élevations, pentes, courbures, ...).

Les récents développements de l'observation satellitaire de la surface terrestre dans des buts environnementaux ou militaires ont vu croître leurs besoins d'une meilleure description du phénomène de diffusion afin de pouvoir interpréter les mesures de manière plus juste. L'observation de la surface marine à grande échelle est devenue un des points clés dans l'estimation des paramètres géophysiques tels que l'intensité et la direction du vent ou encore la température et la salinité de l'eau. Mieux prévoir la diffusion électromagnétique due à la surface marine est aussi devenu un maillon nécessaire dans la détection de cibles en mer. Dans toutes ces applications, l'étude de l'influence de tous les phénomènes hydrodynamiques et électromagnétiques prenant part aux problèmes de diffraction est devenue une priorité. Dans l'estimation de la température de brillance et dans la détection de cibles en mer, l'influence de l'écume, principalement par grands vents, prend une part importante dans l'estimation des données.

L'océan est un milieu complexe. Il est inhomogène, évolue dans le temps et sa surface multi-échelles est le lieu d'interactions nonlinéaires entre les vagues. Ces interactions résonnantes participent à la création des plus grandes vagues et à l'évolution de la surface. Le profil des élevations de surface qui en résulte présente un caractère non Gaussien qui n'est généralement pas pris en compte dans la plupart des modèles. En effet, l'approxima-

tion de la Gaussianité est bonne en première approche, principalement par vents modérés. Lorsque le vent devient assez fort, les vagues se cambrent et déferlent provoquant alors l'apparition d'écume. Les nonlinéarités deviennent aussi très importantes car de grandes vagues modulent la forme des petites se déplaçant sur leur surface. Tous ces phénomènes (vagues cambrées, écume) contribuent à l'écho radar de la mer et principalement aux angles rasants

Avant même d'étudier l'influence de l'écume, il nous a donc semblé nécessaire d'étudier l'aspect non-linéaire de la surface. Comme nous le verrons dans la suite du manuscrit, les interactions non-linéaires vague-vague apparaissent même par vent faible et influencent de manière significative la forme du diagramme de diffusion, entraînant une erreur importante sur l'estimation des paramètres recherchés. Le problème du déferlement reste ouvert et compliqué et nous ne proposons ici qu'une approche très partielle.

Première partie Le manuscrit suit l'ordre chronologique du déroulement de la thèse et la première partie est logiquement consacrée à l'aspect hydrodynamique du problème. Les principales équations qui gouvernent l'évolution des vagues à la surface de la mer sont rappelées brièvement dans le premier chapitre. Le modèle non-linéaire adopté est nommé "Choppy wave model" (CWM). Il est plus robuste à l'insertion de hautes fréquences que les développements perturbatifs classiques (*Longuet-Higgins [1963]*, *Weber and Barrick [1977]*) et permet une description statistique complète de la surface. Les solutions nonlinéaires des équations de mouvement sont comparées au modèle linéaire généralement adopté dans la communauté de la télédétection. Le spectre des élévations, principal outil de description de la surface océanique, y est aussi décrit et une attention particulière est réservée à celui d'Elfouhaily. Une étude complète des statistiques de premier et second ordres du processus des élévations et des pentes dans le cadre du CWM est détaillée dans le second chapitre et les résultats obtenus sont présentés pour les problèmes à deux et trois dimensions. La comparaison au modèle linéaire est systématiquement faite afin de bien mettre en avant les principales différences.

Le troisième chapitre est entièrement consacré à la modification du spectre de la surface par la transformation nonlinéaire. En effet, la première partie montre que le CWM peut se traduire comme la transformation d'une surface linéaire par déplacement horizontal des points de cette surface. La modification du spectre de la surface engendrée par cette transformation traduit l'effet des interactions vague-vague. Les surfaces nonlinéaires générées par cette méthode présentent alors un spectre différent de la surface linéaire qui a permis de les générer. Pour reprendre la terminologie introduite par *Elfouhaily et al. [1999]* nous parlons de spectre "déshabillé" (ou orbital) pour la surface linéaire et de spectre "habillé" pour la surface nonlinéaire. Ce chapitre décrit les relations existantes entre ces deux spectres et présente une méthode permettant d'imposer la forme du spectre dit "habillé" des surfaces nonlinéaires.

Le quatrième chapitre s'intéresse aux statistiques des grandeurs temporelles de la surface nonlinéaire. Une étude succincte et similaire au second et troisième chapitre y est décrite et permet notamment de comparer le CWM à certaines mesures obtenues dans le domaine temporel.

Le cinquième chapitre décrit l'efficacité du CWM pour la génération numérique de surfaces nonlinéaires aléatoires tant dans le domaine spatial que temporel. Plusieurs exemples de surfaces sont présentés mettant en avant l'effet de la transformation et le réalisme visuel des surfaces nonlinéaires.

Seconde partie La seconde partie est consacrée aux problèmes de diffusion électromagnétique par la surface océanique. Le premier chapitre est articulé autour des difficultés rencontrées dans les calculs des diagrammes de diffusion en présence de nonlinéarités. La grandeur communément utilisée dans la communauté en télédétection, la surface équivalente radar normalisée, y est rapidement présentée ainsi que ses méthodes de calcul dans le cadre linéaire et du “Choppy Wave Model”. Plusieurs courbes témoignant de l’impact des nonlinéarités y sont présentées dans l’approximation de Kirchhoff. Elles permettent de s’affranchir des erreurs inhérentes pour l’estimation des paramètres météo-océaniques. Une section est réservée à l’influence des nonlinéarités sur les diagrammes de diffusion dans la plupart des configurations d’éclairement (bistatique, monostatique et azimutale) et pour plusieurs bandes électromagnétiques dans la gamme des micro-ondes. Une autre section présente en détail une nouvelle manière efficace de calculer l’intégrale de Kirchhoff à l’aide de la méthode des convolutions radiales. Cette méthode permet un gain considérable en temps de calcul et en précision, notamment pour le calcul très difficile de l’émissivité. Le dernier chapitre est entièrement consacré à l’étude de l’impact de l’écume dans les problèmes de diffusion. Sa première section rappelle brièvement les principaux modèles d’écume existants dans la littérature et propose un modèle original, plus pertinent du point de vue de la diffusion. Une sommation incohérente des sections efficaces radar de la mer et de l’écume est à la base du modèle et permet de quantifier l’influence de cette dernière.

Première partie

Modélisation hydrodynamique

« *The basic law of the seaway is the apparent lack of any law.* »

— Lord Rayleigh —

Chapitre 1

Description hydrodynamique

Sommaire

1.1	Equations du mouvement	7
1.2	Modèle linéaire et “Choppy Wave Model”	11
1.3	Comparaison du “Choppy Wave Model” avec les modèles existants	16

1.1 Equations du mouvement

1.1.1 Approche Eulérienne

Afin d'introduire les principales notations se rapportant au système étudié, je rappelle ici les équations hydrodynamiques qui seront utiles dans toute la suite. En diffusion, nous travaillerons dans le domaine des micro-ondes où les longueurs d'onde sont supérieures au centimètre et notre étude sera donc restreinte aux seules ondes de gravité. Les forces de capillarité seront négligées car elles agissent à des échelles inférieures.

Je note \mathbf{R} la position dans l'espace, $\mathbf{r} = (x, y)$ sa projection horizontale sur la base cartésienne et z est sa composante verticale. Je note aussi \mathbf{v} le vecteur vitesse, $\mathbf{u} = (u, v)$ sa projection sur l'horizontale et w sa composante verticale. L'étude des forces s'exerçant sur la particule d'eau se trouvant en \mathbf{R} à l'instant t (approche Eulérienne) permet d'écrire les équations de Navier-Stokes ([Lamb \[1932\]](#)) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.1.1)$$

où \mathbf{F} sont les forces extérieures par unité de masse (gravité, capillarité, viscosité, tension de surface...) s'exerçant en t au point \mathbf{R} , p la pression en ce point et ρ la masse volumique de l'eau. Un bilan de conservation de la masse permet d'écrire l'équation de continuité du système pour un fluide supposé incompressible :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.1.2)$$

En supposant le mouvement irrotationnel, hypothèse vérifiée pour les vagues naturelles sauf au moment du déferlement (compression locale de l'eau), il est possible d'écrire la vitesse comme dérivant d'un potentiel :

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi, \quad (1.1.3)$$

Sachant que la vorticité $\mathbf{\Omega} = (\nabla \times \mathbf{v})$ est nulle pour les fluides incompressibles et que

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}, \quad (1.1.4)$$

puis remplaçant (1.1.3) dans (1.1.1) et négligeant la viscosité on obtient l'équation de Bernouilli dans le cas où le fluide n'est soumis qu'à la simple gravité ($\mathbf{F} = -g\hat{\mathbf{z}}$) :

$$\nabla \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right] = 0. \quad (1.1.5)$$

1.1.2 Approche Lagrangienne

Afin de déterminer un profil de surface de mer il peut être plus intéressant de suivre le mouvement des particules plutôt que les variations des grandeurs en un point donné. Le mouvement d'une particule de surface est un peu comme celui d'une bouée sur la surface marine libre de se déplacer selon les trois directions de l'espace.

Je note $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ les coordonnées initiales d'une particule de fluide et $\mathbf{R} = (x, y, z)$ sa position au cours du temps t . Les coordonnées (x, y, z) seront donc des fonctions des variables indépendantes x_0, y_0, z_0 et t qui représentent l'évolution de la particule au cours du temps. La dynamique de la particule est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} - \mathbf{F} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{R}} p \quad (1.1.6)$$

où $\nabla_{\mathbf{R}}$ est une différentiation spatiale par rapport aux variables x, y et z qui ne sont plus des variables indépendantes. Afin de différencier par rapport à des variables indépendantes, on multiplie les deux cotés de l'équation par $\nabla_{\mathbf{R}_0} \mathbf{R}$ dont la représentation sur la base cartésienne est la matrice :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{bmatrix}.$$

En notant alors que $[\nabla_{\mathbf{R}_0} \mathbf{R}] \nabla_{\mathbf{R}} = \nabla_{\mathbf{R}_0}$ la forme Lagrangienne des équations dynamiques s'écrit :

$$\nabla_{\mathbf{R}_0} \mathbf{R} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} - \mathbf{F} \right] + \frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{R}_0} p = 0. \quad (1.1.7)$$

Ainsi, d'après [Lamb \[1932\]](#), lorsque la gravité est la seule force extérieure, ces équations peuvent se réécrire sur la base cartésienne :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial z}{\partial x_0} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_0} = 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial y_0} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial z}{\partial y_0} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_0} = 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial z_0} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial z}{\partial z_0} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_0} = 0 \end{cases} \quad (1.1.8)$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

L'équation de continuité qui s'écrit de manière condensée

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = 1 \quad (1.1.9)$$

(Jacobien constant) traduit la conservation de la masse.

Lamb [1932], *Clamond* [2007] montrent que les (x_0, y_0, z_0) de l'équation (1.1.8) ne sont pas nécessairement les positions des particules au repos mais simplement une manière de paramétrer les particules.

Résolution des équations En s'intéressant au cas particulier d'une surface libre séparant l'eau, de profondeur H , de l'air, *Lamb* [1932] propose une solution où la surface est considérée comme une perturbation de l'équilibre hydrostatique. La solution est l'onde de *Gerstner* [1809], (solution détaillée pour une surface unidimensionnelle dans le livre de *Lamb* [1932]). *Pierson* [1961] montre qu'en réalisant un développement perturbatif selon un petit paramètre ϵ sans dimension tel que :

$$\begin{cases} x &= x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \\ y &= y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots \\ z &= z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \dots \\ p &= p_0 - \rho g z_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots \end{cases} \quad (1.1.10)$$

et qu'en injectant ce développement dans les équations (1.1.8) on retrouve ce résultat au premier ordre en ϵ . Différentes interprétations du paramètre ϵ peuvent être trouvées dans les articles de *Longuet-Higgins* [1953] et *Pierson and Fife* [1961].

Les équations au premier ordre en ϵ s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial z_1}{\partial x_0} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x_0} &= 0 \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial z_1}{\partial y_0} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y_0} &= 0 \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial z_1}{\partial z_0} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z_0} &= 0 \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial x_0} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial t \partial y_0} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial t \partial z_0} &= 0 \end{cases} \quad (1.1.11)$$

L'onde de Gerstner, solution de (1.1.11) s'écrit en trois dimensions sous la forme

$$\begin{cases} x &= x_0 - a \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_0 e^{kz_0} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t) \\ y &= y_0 - a \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{y}}_0 e^{kz_0} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t) \\ z &= z_0 + a e^{kz_0} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega^2 = g |\mathbf{k}| \quad (1.1.12)$$

où \mathbf{k} est un vecteur quelconque contenu dans le plan horizontal et $\mathbf{r}_0 = x_0 \hat{\mathbf{x}}_0 + y_0 \hat{\mathbf{y}}_0$. $\omega^2 = g |\mathbf{k}|$ est la relation de dispersion linéaire des ondes de gravité et a est une amplitude quelconque. Ici et dans la suite du manuscrit, les vecteurs surmontés d'un "chapeau" ($\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$). En deux dimensions (problème invariant selon la direction y) les équations s'écrivent

$$\begin{cases} x &= x_0 - a e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t) \\ z &= z_0 + a e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega^2 = g k. \quad (1.1.13)$$

Une particule définie par ses paramètres lagrangiens x_0 et z_0 parcourt un cercle de centre (x_0, z_0) de rayon $a e^{kz_0}$ qui décroît avec la profondeur. Les figures 1.1(a) à 1.1(f) représentent l'évolution des particules au cours d'une période ainsi que la forme de la surface libre de la mer qui en découle. J'ai laissé en traits plein le parcours de certaines des particules d'eau se trouvant initialement sur une même verticale afin de visualiser comment

le parcours circulaire des particules engendre la vague de Gerstner. Nous pouvons voir que la forme de la vague n'est pas une sinusoïde et la comparaison réalisée dans la sous-section 1.3.1 montre ses similitudes avec l'onde de Stokes.

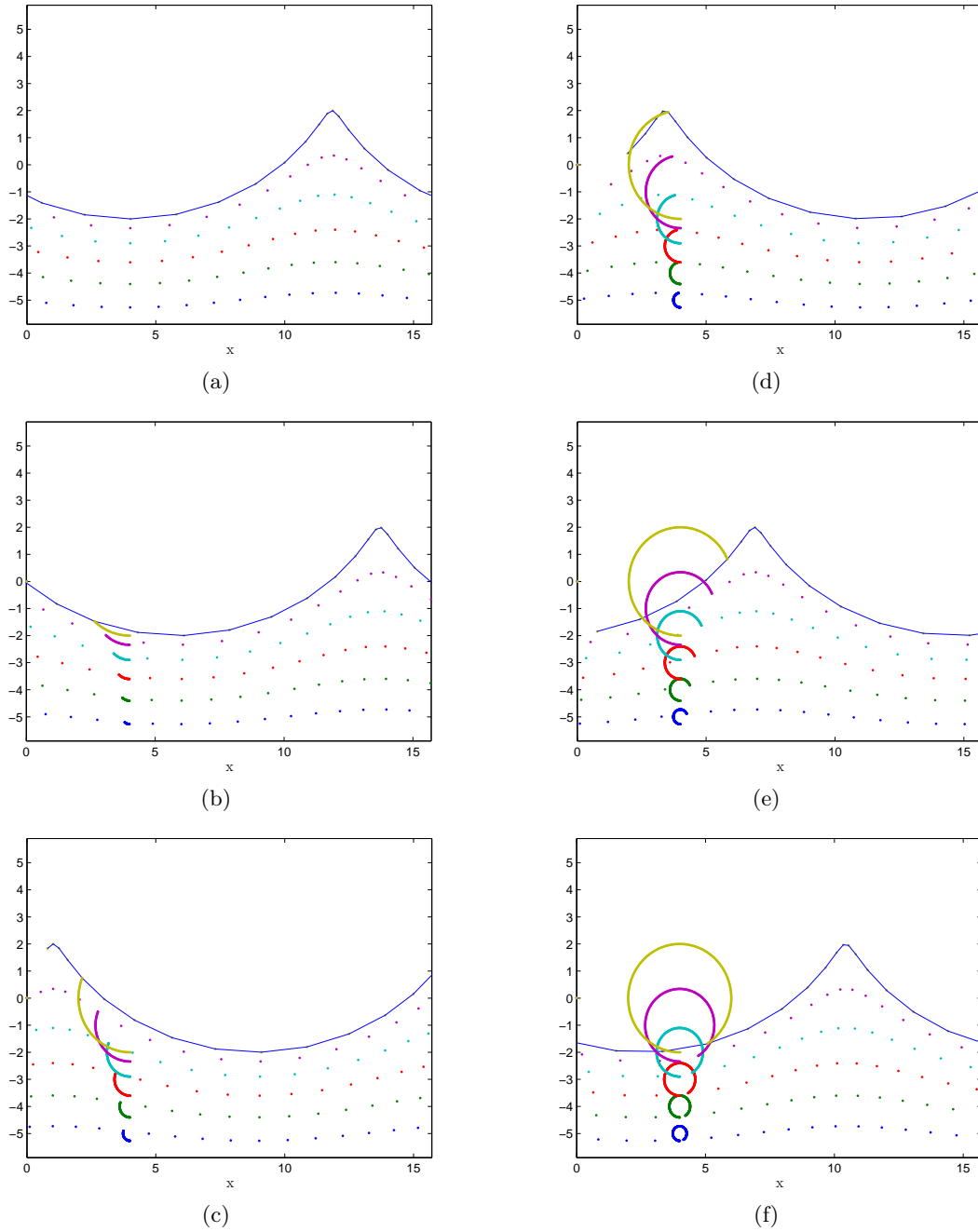


Figure 1.1 – Evolution temporelle des particules d'eau pour la vague de Gerstner.

Les équations (1.1.11) étant linéaires, la généralisation à plusieurs ondes de la vague de Gerstner permet d'écrire le mouvement des particules de la surface ($z_0 = 0$) sous la

forme :

$$\begin{cases} x &= x_0 - \int_{\mathbb{R}^2} a_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} \\ y &= y_0 - \int_{\mathbb{R}^2} a_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{y}}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} \\ z &= \int_{\mathbb{R}^2} a_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_{\mathbf{k}} t + \phi_{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega_{\mathbf{k}}^2 = g |\mathbf{k}|. \quad (1.1.14)$$

Les $a_{\mathbf{k}}$ et $\phi_{\mathbf{k}}$ sont respectivement les amplitudes et phases des ondes de vecteur d'onde \mathbf{k} .

1.2 Modèle linéaire et “Choppy Wave Model”

1.2.1 Description linéaire

Afin de simplifier les calculs analytiques dépendant des statistiques de la surface de la mer, celle-ci a longtemps été décrite par une superposition d'un grand nombre de vagues indépendantes et donc comme un processus Gaussien. Sous cette hypothèse, les distributions des hauteurs ainsi que des pentes et des courbures suivent des lois Gaussiennes, très proches des distributions observées. Le spectre du processus ou la fonction de corrélation suffisent alors à décrire complètement la surface. Cette description simplifiée permet d'écrire le processus des élévations comme la représentation spectrale d'un processus Gaussien. Chaque fréquence de la décomposition étant pondérée par une amplitude complexe $\hat{h}(\mathbf{k}, \omega) = \sqrt{\Gamma(k, \omega)} e^{i\Phi_{\mathbf{k}}}$ où ici Γ est le spectre spatio-temporel de la surface et $\Phi_{\mathbf{k}}$ une phase aléatoire uniformément répartie entre 0 et 2π :

$$h(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} \hat{h}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega \quad (1.2.15)$$

Dans cette étude nous ne nous intéresserons pas à l'effet Doppler. Pour des problèmes de diffraction, les surfaces sont considérées comme figées car le temps d'interaction de l'onde électromagnétique avec la surface est bien plus faible que les constantes de temps d'évolution temporelle de la surface. La relation de dispersion des ondes de gravité $\omega^2 = g|\mathbf{k}|$ impose l'écriture de l'amplitude complexe sous la forme :

$$\hat{h}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{h}^+(\mathbf{k}) \delta\left(\omega - \sqrt{g|\mathbf{k}|}\right) + \hat{h}^-(\mathbf{k}) \delta\left(\omega + \sqrt{g|\mathbf{k}|}\right) \quad (1.2.16)$$

et la surface :

$$h(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{h}^+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} + \int_{\mathbb{R}^2} \hat{h}^-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} d\mathbf{k}. \quad (1.2.17)$$

Les calculs détaillés en annexe [A.1.1](#) montrent qu'une surface figée peut alors s'écrire

$$h(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{h}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad (1.2.18)$$

avec $\hat{h}(\mathbf{k}) = \hat{h}^+(\mathbf{k}) + \hat{h}^-(\mathbf{k})$. Le spectre $\Gamma(\mathbf{k}) = |\hat{h}(\mathbf{k})|^2$ ainsi symétrisé est appelé spectre de vecteur d'onde. Il est centro-symétrique et s'écrit à l'aide de la fonction d'autocorrélation spatiale :

$$\Gamma(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} C(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \text{avec} \quad C(\mathbf{r}) = \langle h(\mathbf{r}) h(\mathbf{0}) \rangle. \quad (1.2.19)$$

1.2.1.1 Statistique de premier ordre

Dans la description linéaire les élévations sont entièrement définies par leur spectre $\Gamma(\mathbf{k})$ et leur fonction de densité de probabilité (pdf) Gaussienne s'écrit :

$$P_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_0^2}\right) \quad \text{avec} \quad \sigma_0^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = C(\mathbf{0}). \quad (1.2.20)$$

Celle des pentes (∇h) s'écrit :

$$P_2(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi|S^{-1}|} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T S^{-1}\mathbf{z}\right) \quad (1.2.21)$$

où S est la matrice de corrélation des pentes et $|S|$ son déterminant.

1.2.1.2 Le spectre de la mer

Comme mentionné précédemment, les solutions des équations linéaires de mouvement possèdent une infinité de degrés liberté puisque les amplitudes de chaque onde peuvent être choisies arbitrairement et indépendamment les unes des autres. Dans le modèle linéaire, il n'y a pas d'interactions entre les vagues. Toutefois les équations ne sont pas linéaires, *Phillips* [1960a, 1961a]; *Longuet-Higgins* [1962a] ont montré que les ondes interagissent, créant ainsi de nouvelles vagues de fréquences spatiales différentes et ne se déplaçant pas forcément librement. Autrement dit les vagues liées ne respectent plus la relation de dispersion linéaire. Avec le temps, le spectre de la mer se peuple de nouvelles fréquences jusqu'à l'obtention d'un régime d'équilibre. L'énergie fournie par le vent est alors dissipée par déferlement, soit directement à la surface de la mer, soit sur la côte.

Lorsque le vent a soufflé régulièrement depuis longtemps et que le régime d'équilibre est atteint (on parle de "fetch" infini), le spectre de la mer devient stable. *Cox and Munk* [1954], *Jähne and Riemer* [1990] et *Hara et al.* [1994] ont réalisé nombre de mesures dans le domaine des vagues de gravité-capillarité et le projet JONSWAP (Joint North Sea Wave Project) a largement servi à déterminer la forme du spectre pour les basses fréquences. Utilisant, entre autres, les travaux de *Phillips* [1985], *Kitaigorodskii* [1983] et ceux cités précédemment, *Elfouhaily et al.* [1997] ont proposé une forme unifiée du spectre directionnel des vagues de vent paramétrée par la force du vent à 10 mètres au dessus de la surface de mer ainsi qu'un paramètre appelé "âge des vagues" relatif au temps depuis lequel le vent souffle et donc à la vitesse de phase de la vague dominante.

Dans la suite du mémoire j'utiliserai le spectre de mer directionnel d'Elfouhaily pleinement développé qui est aujourd'hui couramment utilisé dans la communauté des océanographes. Dans cette partie je présenterai rapidement les principales caractéristiques qui le définissent. Les résultats établis sont tous généralisables à des spectres de mer différents.

Spectre d'Elfouhaily Le spectre directionnel d'Elfouhaily ne possède que deux harmoniques azimutaux et se met sous la forme

$$\Gamma(k, \varphi) = \frac{B(k)}{2\pi k^4} [1 + \Delta(k) \cos(2\varphi)], \quad (1.2.22)$$

où k est le nombre d'onde de la vague et φ sa direction de propagation par rapport à la direction du vent. $B(k)$ est appelé courbure omnidirectionnelle et $\Delta(k)$ fonction d'étalement du spectre. Leurs expressions peuvent être trouvées dans l'article d'*Elfouhaily et al.* [1997]. Pour la clarté du mémoire le spectre à deux dimensions sera noté $\Gamma(\mathbf{k})$ dans toute la suite.

Représentation du spectre Afin de quantifier l'évolution du spectre de la mer avec le vent, les figures 1.2, 1.3 et 1.4 représentent respectivement le spectre omnidirectionnel $B(k)/2\pi k^4$, la courbure omnidirectionnelle $B(k)$ ainsi que la fonction d'étalement $\Delta(k)$ en fonction du nombre d'onde k pour différents vents lorsque le spectre est pleinement développé.

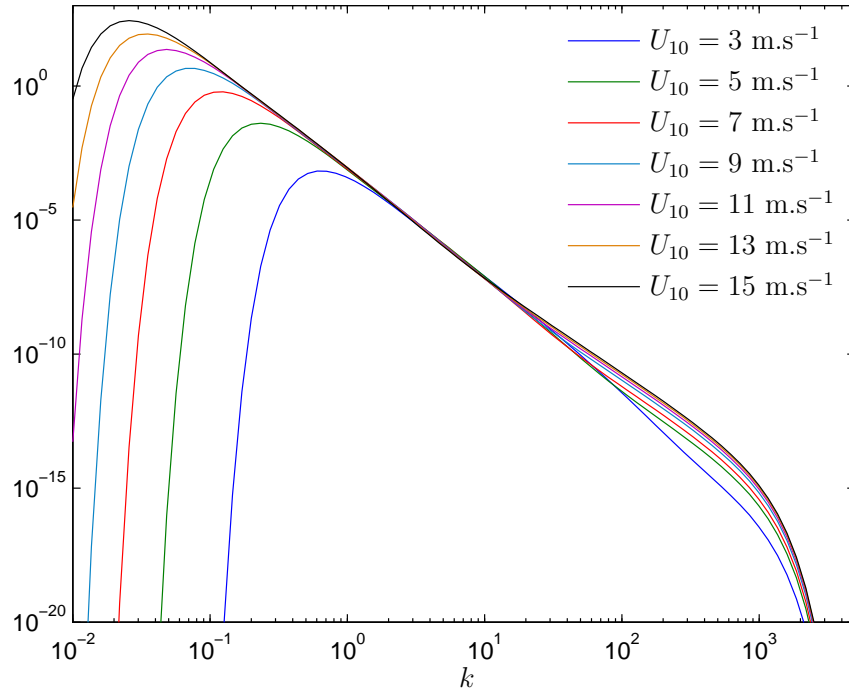


Figure 1.2 – Spectre omnidirectionnel d'Elfouhaily pour différents vents.

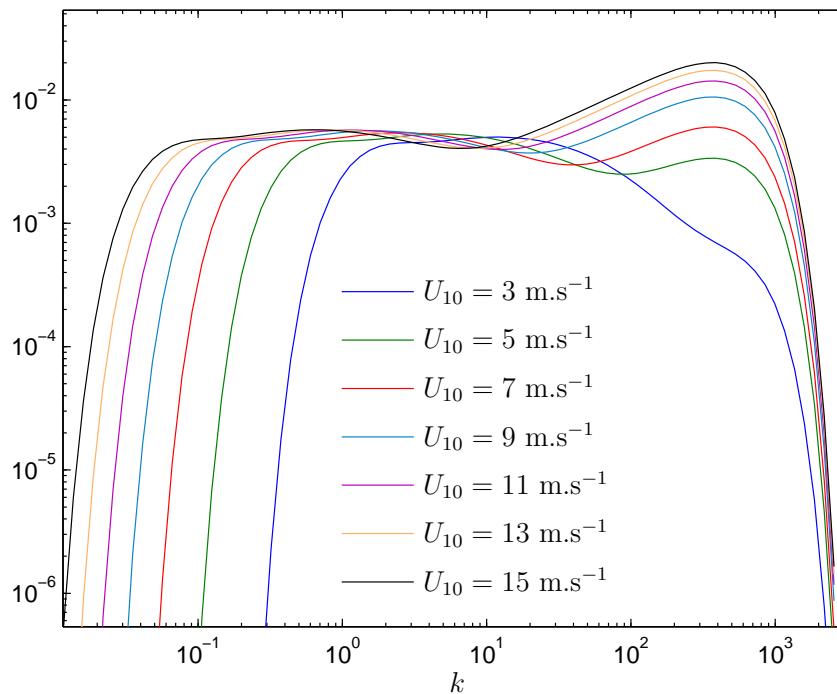


Figure 1.3 – Courbure omnidirectionnelle du spectre d'Elfouhaily pour différents vents.

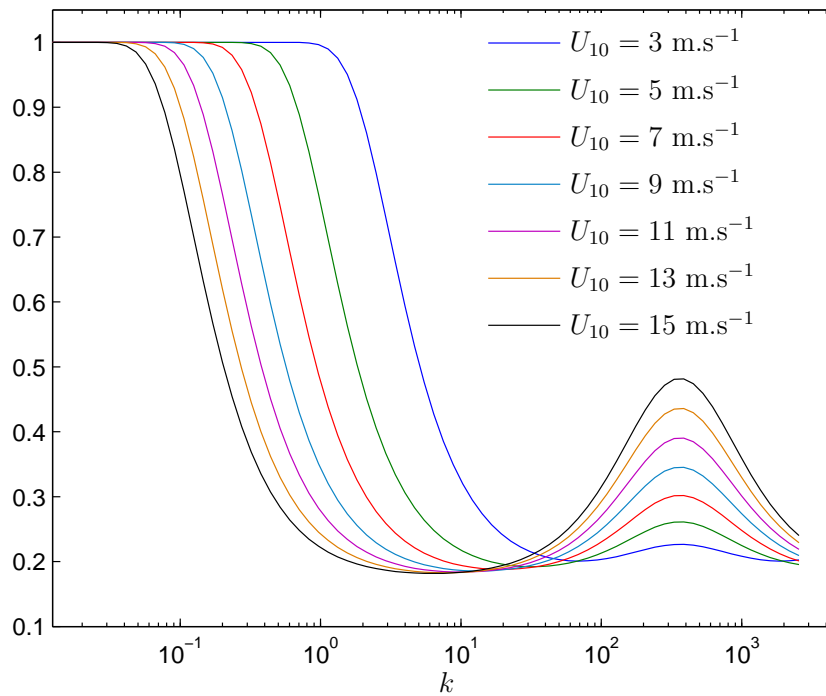


Figure 1.4 – *Fonction d'étalement du spectre d'Elfouhaily pour différents vents.*

La fréquence de pic (k_p), associée à la taille de la plus grande vague, diminue comme l'inverse du carré de la vitesse du vent (U_{10}) témoignant de l'apparition de vagues de grande amplitude. Elle s'écrit approximativement :

$$k_p = \frac{\Omega^2 g}{U_{10}^2} \quad (1.2.23)$$

où g est l'accélération de la pesanteur, U_{10} la vitesse du vent à 10 mètres au dessus de la surface et Ω l'âge inverse des vagues ($\Omega = 0.84$ pour un spectre pleinement développé). La fonction d'étalement montre une diminution de la directivité des vagues métriques et décimétriques avec le vent mais une augmentation de la directivité pour les vagues centimétriques.

Spectre de mer à une dimension Dans de nombreuses études, le cas plus simple de la surface de mer unidimensionnelle est étudié comme une première approche du système. Un spectre unidimensionnel $\Gamma(k)$ est alors nécessaire. Pour respecter les caractéristiques de la surface de mer, l'énergie des vagues de vecteur d'onde k ne se propageant pas dans la direction du vent est alors ramenée également dans la direction du vent et sa direction opposée (le spectre est symétrique). Cette égalité se traduit par l'équation

$$\Gamma(k)dk = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Gamma(k, \varphi) d\varphi k dk \quad (1.2.24)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{B(k)}{k^3} dk \quad (1.2.25)$$

Le spectre d'Elfouhaily à une dimension que j'utiliserai dans la suite du mémoire est tel que :

$$\Gamma(k) = \Gamma(-k) = \frac{1}{2} \frac{B(|k|)}{|k|^3} \quad (1.2.26)$$

1.2.2 Le “Choppy Wave Model”

Dans ce manuscrit le modèle de surfaces nonlinéaires que nous avons adopté est nommé “Choppy Wave Model”. Cette terminologie a été introduite par la communauté des graphistes sur ordinateur par *Fournier and Reeves* [1986] puis reprise plus tard par *Tessendorf* [2004]. Ils utilisent ce modèle pour rendre les surfaces de mer plus réalistes en augmentant de manière artificielle l’effet nonlinéaire. En effet comme nous le verrons dans le chapitre 5 les surfaces générées par ce modèle ont un aspect visuel bien plus réaliste que les surfaces Gaussiennes. Elles paraissent plus houleuses et présentent un aspect plus rugueux de part la présence de crêtes de vagues plus affûtées. Le terme “Choppy” est utilisé pour traduire cet aspect tempétueux de la surface.

La surface statique dite linéaire de la mer est l’ensemble des points définis par le couple de coordonnées : $(\mathbf{r}, h(\mathbf{r}))$ où $h(\mathbf{r})$ est définie équation (1.2.18). La surface non linéaire est quant à elle décrite par l’ensemble des particules de surface définies par l’équation (1.1.14). Cette surface est donc paramétrée par les couples :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r}) \\ \int_{\mathbb{R}^2} \Psi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} \end{array} \right. \quad (1.2.27)$$

$$\text{où} \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} i\hat{\mathbf{k}} \Psi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad (1.2.28)$$

représente le déplacement horizontal des particules et $\Psi(\mathbf{k})$ est l’amplitude du mouvement circulaire des particules définies par le nombre d’onde \mathbf{k} . $\Psi(\mathbf{k})$ contient également la phase aléatoire de chaque onde. $|\Psi(\mathbf{k})|^2$ peut donc se définir comme le “spectre des particules” que *Lindgren* [2006] nomme spectre orbital. Ce déplacement horizontal s’écrit en trois dimensions comme la transformée de Riesz du déplacement vertical et comme sa transformée de Hilbert en deux dimensions :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + D(x) \\ \int_{\mathbb{R}} \Psi(k) e^{ikx} dk \end{array} \right. \quad (1.2.29)$$

$$\text{où} \quad D(x) = \int_{\mathbb{R}} i \operatorname{sign}(k) \Psi(k) e^{ikx} dk. \quad (1.2.30)$$

où sign est la fonction signe ($\operatorname{sign}(k) = \pm 1$ si $k \gtrless 0$). Par construction il est très facile de transformer une surface linéaire en une surface nonlinéaire par déplacement de la coordonnée horizontale. Le spectre utilisé pour définir la surface linéaire devient alors le spectre orbital de la surface nonlinéaire.

Comme nous le montrerons au chapitre 3 un spectre de surface nonlinéaire réaliste implique un spectre orbital différent. Ce dernier sera nommé spectre déshabillé et le spectre de la surface nonlinéaire sera nommé spectre habillé.

Il faut tout de même noter que le déplacement horizontal peut entraîner la création de points de rebroussement de la surface. Toutefois, le développement perturbatif introduit par *Pierson* [1961] suggère que l’amplitude des mouvements horizontaux reste faible et donc que le déplacement reste petit. Cette condition se traduit également par la condition de non rebroussement sur une onde : $|D'| < 1$. De manière statistique, cette condition s’écrit $\langle |\mathbf{D}'|^2 \rangle = \sigma_2^2 \ll 1$, ce qui est le cas pour les surfaces de mer. La probabilité d’appartenance d’un rebroussement déjà calculée par *Pierson* [1961] s’écrit facilement :

$$\mathbb{P}_{\text{rebroussement}} = \operatorname{Erfc} \left(\frac{1}{2\sigma_2^2} \right) \quad (1.2.31)$$

où Erfc est la fonction erreur complémentaire et σ_2^2 le moment d'ordre deux du spectre. Cette prise en compte du déplacement horizontal des particules modifie les statistiques des élévations, pentes et courbures de la surface ainsi que le spectre de ces différentes grandeurs. Le prochain chapitre décrit en détail les statistiques de premier et second ordre de la plupart des grandeurs utilisées en télédétection et les compare aux mesures rapportées dans la littérature.

1.3 Comparaison du “Choppy Wave Model” avec les modèles existants

Les modèles prenant en compte la nonlinéarité des vagues de gravité sont généralement basés sur le calcul du potentiel des vitesses sous l'hypothèse d'un fluide idéal. Lorsque les pentes des vagues restent faibles, les équations nonlinéaires peuvent être résolues au moyen d'un développement perturbatif (*Tick* [1959]). Cette approche consiste à résoudre de manière itérative les équations du mouvement de l'élévation et du potentiel des vitesses (*Hasselmann* [1962]; *Longuet-Higgins* [1963]; *Weber and Barrick* [1977]). Par une autre méthode *Zakharov* [1968] a montré que l'élévation et le potentiel des vitesses évalués à la surface sont des variables canoniques conjuguées et qu'il devient alors possible de réécrire les équations comme un système Hamiltonien. Cette méthode est basée sur la technique du développement d'opérateurs et utilise la troncature d'Hamiltonien (*Zakharov* [1968]; *Creamer et al.* [1989]; *Watson and West* [1975]; *West and al.* [1987]; *Fructus et al.* [2005]). Nous pouvons nous référer à l'article d'*Elfouhaily et al.* [2000] pour une comparaison des deux approches.

Récemment, plusieurs modèles déterministes (*Dias* [2006]) prenant en compte de manière exacte les nonlinéarités de la surface ont été développés (*Ruban* [2005]; *Zakharov et al.* [2002]; *Chalikov and Sheinin* [2005]; *Fructus et al.* [2005]) et les récentes améliorations numériques devraient nous permettre de les comparer au CWM grâce aux simulations de Monte-Carlo (*Chalikov* [2005]; *Toffoli et al.* [2008]). Cependant, ces méthodes numériques ne permettent pas de maîtriser le spectre de la surface qui évolue et les comparaisons statistiques ne sont donc pas évidentes. Nous allons donc nous limiter à la comparaison aux développements perturbatifs cités précédemment.

1.3.1 Développement de Stokes

Ici, et dans toute la suite du document, toutes les grandeurs surmontées d'un “tilde” ($\tilde{}$) font référence aux processus nonlinéaires. Afin de comparer le “Choppy Wave Model” avec les modèles perturbatifs déjà existants, nous pouvons obtenir un développement perturbatif de la fonction implicite \tilde{h} en considérant qu'il n'y a pas de point de rebroussement. Pour plus de simplicité, seul le cas unidimensionnel est étudié et \tilde{h} est la trochoïde de Gerstner que nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} h(x) &= \beta \cos(Kx) \\ D(x) &= -\beta \sin(Kx) \end{cases} \quad (1.3.32)$$

où β et $K\beta$ sont respectivement des paramètres de hauteurs et de pentes. Les règles de dérivation permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \tilde{h}'(x + D(x)) &\approx h'(x)(1 - D'(x)) \\ \tilde{h}''(x + D(x)) &\approx h''(x)(1 - D'(x)) - D''(x)h'(x)(1 - 2D'(x)) \end{cases} \quad (1.3.33)$$

et d’après (1.3.33) :

$$\tilde{h}(x) \approx \tilde{h}(x + D(x)) - D(x)\tilde{h}'(x + D(x)) + \frac{1}{2}D^2\tilde{h}''(x + D(x)) \quad (1.3.34)$$

$$\approx h(x) - D(x)h'(x) + D(x)D'(x)h'(x) + \frac{1}{2}D^2h''(x). \quad (1.3.35)$$

En remplaçant (1.3.32) dans (1.3.35) et en ne conservant que les termes d’ordre inférieur ou égal à $\beta^3 K^2$ il vient :

$$\tilde{h}(x) = \beta \left[\frac{-K\beta}{2} + \left(1 - \frac{3(K\beta)^2}{8} \right) \cos(Kx) + \frac{K\beta}{2} \cos(2Kx) + \frac{3(K\beta)^2}{8} \cos(3Kx) \right]. \quad (1.3.36)$$

Afin de simplifier l’écriture de l’amplitude du fondamental, [Kinsman \[2002\]](#) (p. 254) propose de considérer β comme un développement en ordre de a où $a = 1 - 3(K\beta)^2/8$. Après avoir ôté la valeur moyenne de \tilde{h} , le développement au troisième ordre en Ka de la trochoïde s’écrit :

$$\tilde{h}(x) = a \left[\cos(Kx) + \frac{Ka}{2} \cos(2Kx) + \frac{3(Ka)^2}{8} \cos(3Kx) \right] \quad (1.3.37)$$

qui est exactement le développement de l’onde de Stokes au troisième ordre.

[Kinsman \[2002\]](#) montre que l’onde de Gerstner ne diffère de l’onde de Stokes qu’à partir de l’ordre quatre. Par extension le CWM reste donc compatible avec la théorie de Stokes au troisième ordre.

1.3.2 Théorie de Longuet-Higgins

L’approche classique de la théorie nonlinéaire des champs aléatoires de vagues développée par [Hasselmann \[1962\]](#) et [Longuet-Higgins \[1963\]](#) est basée sur un développement perturbatif en série de l’élévation \tilde{h} ainsi que du potentiel des vitesses $\tilde{\Phi}$:

$$\begin{cases} \tilde{h}(\mathbf{r}, t) &= h^{(1)}(\mathbf{r}, t) + h^{(2)}(\mathbf{r}, t) + \dots \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t) &= \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \Phi^{(2)}(\mathbf{r}, t) + \dots \end{cases} \quad (1.3.38)$$

Les premiers termes sont ceux de la représentation linéaire développée en partie 1.2.1 et correspondent au processus Gaussien :

$$\begin{cases} h^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{j=1}^N a_j \cos(\psi_j) \\ \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{j=1}^N b_j \cos(\psi_j) \end{cases} \quad \text{où} \quad \psi_j = \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t - \varphi_j. \quad (1.3.39)$$

Les termes suivants sont des combinaisons de ces termes linéaires et peuvent être trouvés en injectant ces solutions dans les équations de Navier-Stokes. [Longuet-Higgins \[1963\]](#) calcula le terme d’ordre deux en élévation sous la forme :

$$h^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \left[K_{ij} \cos \psi_i \cos \psi_j + K'_{ij} \sin \psi_i \sin \psi_j \right], \quad (1.3.40)$$

$$\text{où } \begin{cases} K_{ij} &= (|\mathbf{k}_i| |\mathbf{k}_j|)^{-\frac{1}{2}} \left[B_{ij}^- + B_{ij}^+ - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j \right] + |\mathbf{k}_i| + |\mathbf{k}_j| \\ K'_{ij} &= (|\mathbf{k}_i| |\mathbf{k}_j|)^{-\frac{1}{2}} \left[B_{ij}^- - B_{ij}^+ - |\mathbf{k}_i| |\mathbf{k}_j| \right] \\ B_{ij}^\pm &= \frac{\Omega_{ij}^\pm (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j \mp |\mathbf{k}_i| |\mathbf{k}_j|)}{\Omega_{ij}^\pm - |\mathbf{k}_i \pm \mathbf{k}_j|} \\ \Omega_{ij}^\pm &= \left(\sqrt{|\mathbf{k}_i|} \pm \sqrt{|\mathbf{k}_j|} \right)^2 \end{cases} \quad (1.3.41)$$

En se limitant au cas bidimensionnel, nous pouvons remplacer $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j$ par $\text{sign}(k_i k_j) |k_i k_j|$ dans l'expression (1.3.41). Les noyaux se simplifient :

$$\begin{cases} K'_{ij} &= -\text{sign}(k_i k_j) \max(|k_i|, |k_j|) \\ K_{ij} &= \min(|k_i|, |k_j|) \end{cases} \quad (1.3.42)$$

Le développement perturbatif (1.3.35) du CWM nous donne pour l'ordre deux :

$$\tilde{h}^{(2)}(x, t) = -D(x, t) \partial_x h^{(1)}(x, t). \quad (1.3.43)$$

En adoptant le développement de h sous la forme de (1.3.38) nous avons :

$$\begin{cases} \partial_x h^{(1)}(x, t) &= -\sum_{j=1}^N a_j \sin(\psi_j), \\ D^{(1)}(x, t) &= -\sum_{i=1}^N a_i \text{sign}(k_i) \sin(\psi_i), \end{cases} \quad (1.3.44)$$

Soit

$$\tilde{h}^{(2)} = -\sum_{i,j=1}^N a_i a_j k_j \text{sign}(k_i) \sin(\psi_i) \sin(\psi_j). \quad (1.3.45)$$

En prenant la demi-somme de cette expression et celle où i et j sont intervertis, puis en enlevant la valeur moyenne il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{h}^{(2)} - \langle \tilde{h}^{(2)} \rangle &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \text{sign}(k_i k_j) (|k_i| + |k_j|) \sin(\psi_i) \sin(\psi_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i^2 |k_i| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \left(\tilde{K}_{ij} \cos(\psi_i) \cos(\psi_j) + \tilde{K}'_{ij} \sin(\psi_i) \sin(\psi_j) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \tilde{K}_{ij} (\cos(\psi_i - \psi_j) - \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (1.3.46)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \tilde{K}'_{ij} &= -\text{sign}(k_i k_j) \max(|k_i|, |k_j|) \\ \tilde{K}_{ij} &= \text{sign}(k_i k_j) \min(|k_i|, |k_j|) \end{cases} \quad (1.3.47)$$

et δ le symbole de Kronecker. Cette dernière expression est très ressemblante avec celle de Longuet-Higgins et coïncide sur la diagonale. Le développement de CWM reste donc compatible avec Longuet-Higgins au moins pour des spectres à bande étroite.

Chapitre 2

Etude statistique des processus nonlinéaires

Sommaire

2.1	Description statistique des surfaces nonlinéaires 2D	19
2.2	Description statistique des surfaces nonlinéaires 3D	22

2.1 Description statistique des surfaces nonlinéaires 2D

Lorsque les champs de vagues étudiés sont très directifs, on parle de modèle à longues crêtes (“long crested model”). Le spectre de la mer est alors très directif aussi et peut être ramené en première approximation à un spectre unidimensionnel. L’étude du cas à deux dimensions qui en découle permet une approche plus simple du problème général et ses résultats servent à orienter les interprétations du cas tridimensionnel. Dans un souci de simplicité et de clarté, je présente donc en premier l’étude statistique du problème bidimensionnel.

2.1.1 Hauteurs

L’étude statistique des élévations peut en grande partie être réalisée en calculant la fonction caractéristique à un point. Elle permet de déduire facilement la plupart des caractéristiques statistiques. Pour les hauteurs de la surface nonlinéaire \tilde{h} elle s’écrit :

$$\tilde{\Phi}(v) = \langle e^{iv\tilde{h}} \rangle, \quad (2.1.1)$$

où $\langle . \rangle$ est la moyenne d’ensemble du processus. Le processus des hauteurs étant supposé stationnaire nous pouvons utiliser une moyenne ergodique spatiale pour la calculer

$$\tilde{\Phi}(v) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \langle e^{iv\tilde{h}(x)} \rangle dx. \quad (2.1.2)$$

Si l’on applique le changement de variable $x \rightarrow x + D(x)$ supposé univoque en l’absence de point de rebroussement, la fonction implicite \tilde{h} disparaît puisque par construction :

$$\tilde{h}(x + D(x)) = h(x) \quad (2.1.3)$$

et il vient :

$$\tilde{\Phi}(v) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \langle e^{ivh(x)} (1 + D'(x)) \rangle dx. \quad (2.1.4)$$

Comme h et D sont deux processus aléatoires Gaussiens, nous en déduisons (les détails des calculs se trouve en annexe B.1) :

$$\tilde{\Phi}(v) = (1 - iv\sigma_1^2) \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma_0^2\right) \quad (2.1.5)$$

où nous avons introduit les moments absolus du spectre :

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |k|^n \Gamma(k) dk. \quad (2.1.6)$$

L'intégrale en x disparaît puisque la moyenne d'ensemble permet de supprimer la dépendance spatiale. Notons que σ_0^2 et σ_2^2 sont respectivement la hauteur quadratique moyenne (msh pour “mean square height”) et la pente quadratique moyenne (mss pour “mean square slope”) de la surface linéaire. La Transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique (2.1.1) donne alors la fonction de densité de probabilité des élévations (détails des calculs en annexe B.2) :

$$\tilde{P}_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}(v) e^{-ivz} dv = P_0(z) \left(1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} z\right) \quad (2.1.7)$$

où

$$P_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (2.1.8)$$

est la loi normale centrée de variance σ_n^2 . Tout les moments $\tilde{\mu}_n = \langle \tilde{h}^n \rangle$ et cumulants associés $\tilde{\kappa}_n$ des élévations sont donnés par les dérivées successives de la fonction caractéristique et son logarithme pris en zéro :

$$\tilde{\mu}_n = (i)^n \frac{\partial \Phi(v)}{\partial v} \Big|_{v=0}, \quad \tilde{\kappa}_n = (i)^n \frac{\partial}{\partial v} [\log(\Phi(v))]_{v=0} \quad (2.1.9)$$

Il vient, entre autres :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1 &= -\sigma_1^2, & \tilde{\mu}_2 &= \sigma_0^2, & \tilde{\mu}_3 &= -3\sigma_0^2\sigma_1^2, & \tilde{\mu}_4 &= 3\sigma_0^4 \\ \tilde{\kappa}_1 &= -\sigma_1^2, & \tilde{\kappa}_2 &= \sigma_0^2 - \sigma_1^4, & \tilde{\kappa}_3 &= -2\sigma_1^6, & \tilde{\kappa}_4 &= -6\sigma_1^8 \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Si la surface linéaire h est centrée alors la surface nonlinéaire associée ne l'est plus. Les coefficients de dissymétrie (“skewness”) et d'aplatissement (“kurtosis”) de la surface nonlinéaire s'écrivent alors :

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{\tilde{\mu}_3'}{\tilde{\mu}_2'^{3/2}} = \frac{-2\sigma_1^6}{(\sigma_0^2 - \sigma_1^4)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda}_4 = \frac{\tilde{\mu}_4'}{\tilde{\mu}_2'^2} = \frac{-6\sigma_1^8}{(\sigma_0^2 - \sigma_1^4)^2} + 3 \quad (2.1.11)$$

où les $\tilde{\mu}_n' = \langle (\tilde{h} - \langle \tilde{h} \rangle)^n \rangle$ sont les moments centrés des élévations. Le coefficient de dissymétrie est très légèrement négatif ainsi que l'excès d'aplatissement relatif au processus Gaussien ($\tilde{\lambda}_4 - 3$). Cet effet est naturellement attendu puisque la transformation tend à aplatir les creux des vagues et à affiner leurs crêtes créant une dissymétrie “haut-bas” des vagues comme nous le montre la vague de Gerstner figure 1.1. La hauteur moyenne est ainsi légèrement décalée vers les valeurs négatives.

Afin de tester la forme de la fonction de densité de probabilité (pdf dans la suite du manuscrit) des élévations nous la comparons à la célèbre distribution de *Tayfun* [1980] pour les spectres à bande étroite. Celle-ci peut s'écrire :

$$P_{\text{Tayfun}}(z) = \frac{1}{\pi\sigma_0\nu} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\nu^2}} \left(e^{\frac{(1-C(\xi))^2}{2\nu^2}} + e^{\frac{(1+C(\xi))^2}{2\nu^2}} \right) \frac{d\xi}{C(\xi)} \quad (2.1.12)$$

où $\nu = k_0\sigma_0$ est un petit paramètre sans dimension, k_0 le nombre d'onde central du spectre étroit et $C(\xi) = (1 + 2k_0z + \xi^2)^{1/2}$.

Dans le cas d'un spectre à bande étroite $\sigma_1^2 \simeq k_0\sigma_0^2$ et la distribution du CWM (2.1.7) ne dépend alors plus que de ν et k_0 . La figure 2.1 a été réalisée pour des valeurs typiques $\nu = 0.1$ et $\sigma_0 = 0.5$ mètre. Les deux distributions restent extrêmement proches pour des valeurs d'élévations modérées. On peut noter que les décalages des valeurs maximales dus à la dissymétrie "haut-bas" de la forme des vagues sont égaux.

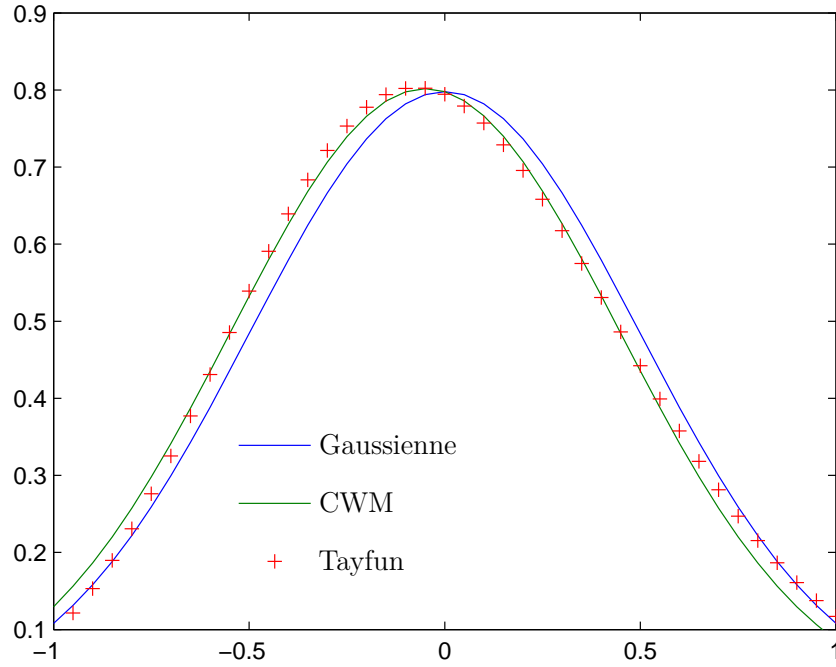


Figure 2.1 – Comparaison de la pdf des élévations du CWM avec la distribution de Tayfun pour des paramètres typiques $\nu = 0.1$ et $\sigma_0 = 0.5$ mètres. La distribution Gaussienne est donnée pour référence.

2.1.2 Pentés

En différenciant l'équation (2.1.3) on obtient une définition implicite du processus des pentes de la surface nonlinéaire :

$$\frac{d\tilde{h}}{dx}(x + D(x)) = \frac{h'(x)}{1 + D'(x)} \quad (2.1.13)$$

Comme pour les hauteurs nous nous sommes intéressés à la Transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique des pentes qui s'écrit :

$$\tilde{P}_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x |x| P_2(zx) P_2(x - 1) \quad (2.1.14)$$

et dont une expression analytique peut être trouvée :

$$\tilde{P}_2(z) = \frac{e^{-1/2\sigma_2^2}}{\pi(1+z^2)^2} + \frac{\sigma_2^2(1+z^2)+1}{(1+z^2)^{5/2}} \times \text{Erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma_2^2(1+z^2)}} \right) P_2 \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right) \quad (2.1.15)$$

où Erf est la fonction erreur. Les détails des calculs se trouvent en annexe B.3. [Aberg \[2007\]](#) a obtenu une expression similaire pour la distribution des pentes à élévation fixée dans le cadre d'un modèle Lagrangien similaire. La distribution est paire et les pentes de la surface nonlinéaire sont donc centrées et symétriques. Le quatrième moment de la distribution est infini, ce qui rend la queue de la distribution non réaliste. En effet, au delà d'un certain seuil de pentes les vagues sont très cambrées et généralement déferlent. La distribution doit donc être tronquée au delà d'un seuil limite de déferlement que [Longuet-Higgins and Fox \[1977\]](#) estime près de $z_{\max} = 0.586$ (30°). Afin de tester la forme de la distribution, nous la comparons avec la célèbre distribution établie par [Cox and Munk \[1954\]](#) écrite sous la forme d'un développement en Gram-Charlier. Celle-ci a été obtenue grâce à l'analyse des points brillants dûs à la réflexion du soleil sur la surface de la mer pour différentes configurations de vent. Un raisonnement de réflexion spéculaire sur une facette de la mer permet alors de remonter à sa pente en connaissant la position du soleil ainsi que celle de l'objectif photographique. Cette distribution reste encore à ce jour une distribution de référence :

$$\tilde{P}_{2\text{C\&M}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-z^2/2\sigma_2^2} \times \left(1 + \frac{c_4}{24} \times \left(\frac{z^4}{\sigma_2^4} - 6\frac{z^2}{\sigma_2^2} + 3 \right) \right) \quad (2.1.16)$$

où c_4 est l'excès d'aplatissement (kurtosis) des pentes. La figure 2.2 montre les deux distributions ainsi que la loi Gaussienne de référence. Afin de rendre la comparaison pertinente les deux distributions (2.1.15) et (2.1.16) ont le même second moment $\tilde{\sigma}_2^2 = 0.03$. L'accord entre les deux distributions est parfait avec $c_4 = \tilde{\lambda}_4' - 3 \simeq .27$. Cet excès de kurtosis des pentes ($\tilde{\lambda}_4' - 3$) est obtenu en tronquant la distribution (2.1.15) à une valeur maximum de $z_{\max} = 0.7$. La valeur de c_4 ainsi obtenue est très proche des valeurs relevées par Cox & Munk. La démarcation avec la Gaussienne est nette et la pdf possède une décroissance beaucoup plus lente. La distribution de Cox & Munk utilisée dans cette comparaison est celle obtenue pour une surface lissée par une couche fine d'huile ("slick surface"). En effet notre modèle n'étant valable que dans le domaine des vagues de gravité, la couche d'huile éliminant les petites vagues de capillarité permet de faire une comparaison significative.

2.2 Description statistique des surfaces nonlinéaires 3D

2.2.1 Hauteurs

De même qu'en dimension deux, nous nous intéressons à la fonction caractéristique des hauteurs :

$$\tilde{\Phi}(v) = \left\langle e^{iv\tilde{h}} \right\rangle. \quad (2.2.17)$$

En utilisant la même méthode qu'en dimension deux et en appliquant le changement de variable $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r})$ on peut réécrire :

$$\tilde{\Phi}(v) = \lim_{\mathcal{A} \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} \left\langle e^{ivh(\mathbf{r})} |J(\mathbf{r})| \right\rangle \mathbf{d}\mathbf{r}. \quad (2.2.18)$$

Ici $|J(\mathbf{r})|$ est le Jacobien de la transformation qui peut être mis sous la forme :

$$J(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} 1 + \partial_x D_x(\mathbf{r}) & \partial_y D_x(\mathbf{r}) \\ \partial_x D_y(\mathbf{r}) & 1 + \partial_y D_y(\mathbf{r}) \end{vmatrix}, \quad (2.2.19)$$

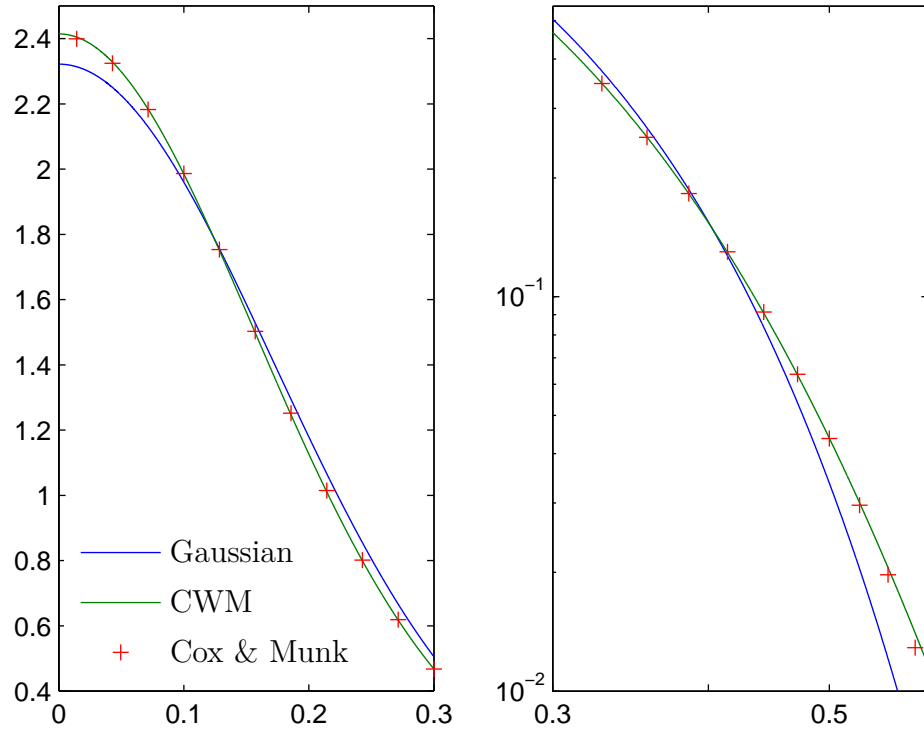


Figure 2.2 – Distribution des pentes de Cox & Munk et celle du CWM. La loi Gaussienne est donnée pour référence.

où $|\cdot|$ dénote le déterminant. Le calcul de (2.2.18) nous permet d'introduire les moments absolus partiels et totaux du spectre des hauteurs :

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|k_x|^\alpha |k_y|^\beta}{|\mathbf{k}|^\gamma} \Gamma(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad \sigma_n^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{k}|^n \Gamma(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (2.2.20)$$

et de réécrire la fonction caractéristique des hauteurs (voir annexe B.5) :

$$\tilde{\Phi}(v) = \left(1 - iv\sigma_1^2 + v^2\Sigma_1\right) \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma_0^2\right) \quad (2.2.21)$$

où $\Sigma_1 = \sigma_{111}^4 - \sigma_{201}^2\sigma_{021}^2$. Pour un spectre de mer d'Elfouhaily, le résultat obtenu est similaire à celui représenté figure 2.1. Les moments de la distribution des élévations s'obtiennent aisément :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mu}_1 \rangle &= -\sigma_1^2 & \langle \tilde{\mu}_2 \rangle &= \sigma_0^2 - 2\Sigma_1 \\ \langle \tilde{\mu}_3 \rangle &= -3\sigma_0^2\sigma_1^2 & \langle \tilde{\mu}_4 \rangle &= 3\sigma_0^4 \left(1 - 4\frac{\Sigma_1}{\sigma_0^2}\right), \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

ainsi que la pdf :

$$\tilde{P}_0(z) = P_0(z) \left(1 + \frac{\Sigma_1}{\sigma_0^2} - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}z - \frac{\Sigma_1}{\sigma_0^4}z^2\right). \quad (2.2.23)$$

Nous pouvons en déduire les deux grandeurs fréquemment utilisées en mesure océanique statistique, la skewness ($\tilde{\lambda}_3$) et la kurtosis ($\tilde{\lambda}_4$) des élévations. Les valeurs associées aux

spectres isotropes sont données entre parenthèses :

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_3 &= \frac{-2\sigma_1^2 [\sigma_1^4 + 3\Sigma_1]}{[\sigma_0^2 - (\sigma_1^4 + 2\Sigma_1)]^{3/2}} \left(= -\frac{\sigma_1^6}{2}(\sigma_0^2 - \frac{\sigma_1^4}{2})^{-3/2} \right) \\ \tilde{\lambda}_4 &= 3 \frac{\sigma_0^4 \left(1 - 4\frac{\Sigma_1}{\sigma_0^2}\right) - \sigma_1^4 (\sigma_1^4 + 4\Sigma_1 + 2\sigma_0^2)}{(\sigma_0^2 - (\sigma_1^4 + 2\Sigma_1))^2} \left(= 3\sigma_0^2(\sigma_0^2 - \sigma_1^4) \left(\sigma_0^2 - \frac{\sigma_1^4}{2}\right)^{-2} \right).\end{aligned}\quad (2.2.24)$$

Ici aussi, la skewness est légèrement négative et il apparaît un léger excès de kurtosis.

2.2.2 Pentès

De même qu'en dimension deux, différencier la relation $\tilde{h}(\mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r})) = h(\mathbf{r})$ mène à :

$$[\nabla(\mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r}))] \nabla \tilde{h}(\mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r})) = \nabla h(\mathbf{r}). \quad (2.2.25)$$

De nouveau, nous nous intéressons à la Transformée de Fourier Inverse de la fonction caractéristique des pentès $\tilde{\xi}(\mathbf{v})$:

$$\tilde{P}_2(\mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi^2} \int \tilde{\xi}(\mathbf{v}) e^{-i\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}} d\mathbf{v} \quad (2.2.26)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int \langle |J(\mathbf{r})| e^{-i\mathbf{v} \cdot (\mathbf{z} - J(\mathbf{r})^{-1} \nabla h(\mathbf{r}))} \rangle d\mathbf{v}. \quad (2.2.27)$$

L'intégration en \mathbf{v} conduit à

$$\tilde{P}_2(\mathbf{z}) = \langle \delta(\mathbf{z} - J(\mathbf{r})^{-1} \nabla h(\mathbf{r})) |J(\mathbf{r})| \rangle \quad (2.2.28)$$

$$= \langle \text{sign}(|J(\mathbf{r})|) |J(\mathbf{r})|^2 \delta(J(\mathbf{r})\mathbf{z} - \nabla h(\mathbf{r})) \rangle. \quad (2.2.29)$$

Je définis les variables aléatoires Gaussiennes centrées suivantes :

$$\begin{cases} X_1 = \partial_x D_x \\ X_2 = \partial_x D_y = \partial_y D_x \\ X_3 = \partial_y D_y \\ X_4 = \partial_x h \\ X_5 = \partial_y h \end{cases}. \quad (2.2.30)$$

La matrice de corrélation s'écrit :

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{402}^2 & \sigma_{312}^2 & \sigma_{222}^2 & 0 & 0 \\ \sigma_{312}^2 & \sigma_{222}^2 & \sigma_{132}^2 & 0 & 0 \\ \sigma_{222}^2 & \sigma_{132}^2 & \sigma_{042}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{200}^2 & \sigma_{110}^2 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{110}^2 & \sigma_{020}^2 \end{bmatrix}$$

et nous pouvons alors réécrire l'équation (2.2.29) :

$$\tilde{P}_2(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^3} \text{sign}(|J(\mathbf{r})|) |J(\mathbf{r})|^2 P^1(\mathbf{X}) P^2(J(\mathbf{r})\mathbf{z}) d\mathbf{X} \quad (2.2.31)$$

où P^1 et P^2 sont respectivement les lois Gaussiennes de dimension 3 et 2 et de matrices de corrélation S_1 et S_2 suivantes :

$$S_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{402}^2 & \sigma_{312}^2 & \sigma_{222}^2 \\ \sigma_{312}^2 & \sigma_{222}^2 & \sigma_{132}^2 \\ \sigma_{222}^2 & \sigma_{132}^2 & \sigma_{042}^2 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{200}^2 & \sigma_{110}^2 \\ \sigma_{110}^2 & \sigma_{020}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \quad J(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 + X_1 & X_2 \\ X_2 & 1 + X_3 \end{bmatrix}.$$

La figure 2.3 représente la pdf des pentes selon la direction du vent (upwind) et la direction transverse (crosswind) pour un spectre d'Elfouhaily pleinement développé à $U_{10} = 12 \text{ m.s}^{-1}$. La comparaison est faite avec la loi Gaussienne sous-jacente. Comme en dimension deux la queue de la distribution décroît comme une loi de puissance pour le CWM et se différencie significativement pour des valeurs de pentes réalistes. Pour être réaliste cette distribution doit de nouveau être tronquée à un seuil maximum que l'on peut estimer au seuil de déferlement.

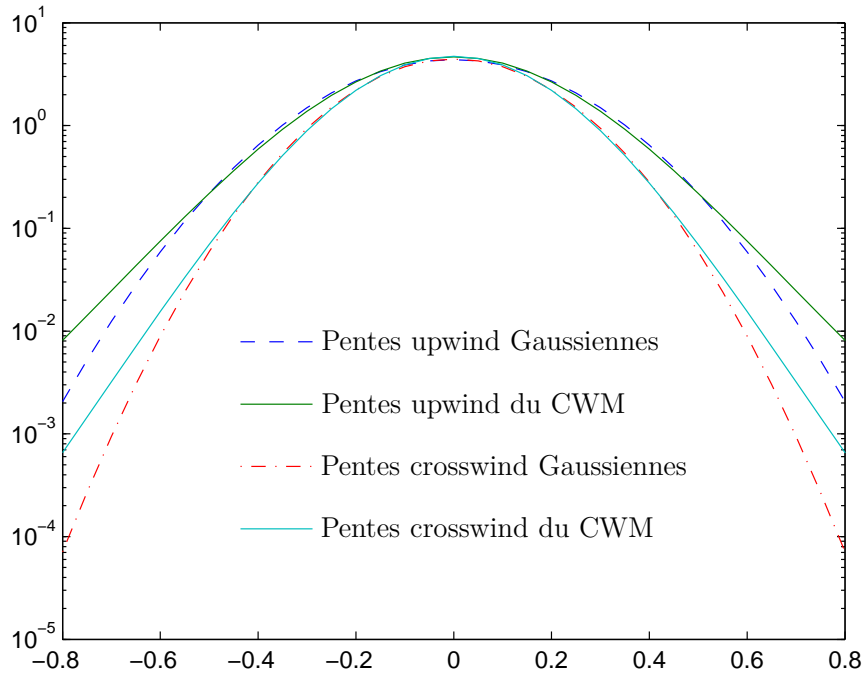


Figure 2.3 – Distribution des pentes du modèle Gaussien et du CWM à un vent de 12 m.s^{-1} (Spectre d'Elfouhaily). C'est le logarithme de la pdf qui est tracé afin de mettre en évidence la différence aux grands angles.

Comparaison avec des données expérimentales

La célèbre distribution des pentes de *Cox and Munk* [1954] a été obtenue grâce à une analyse optique. En effet, il est considéré qu'un point brillant sur la photo provient d'une réflexion spéculaire sur une facette de la mer. Les longueurs d'onde optiques étant nettement inférieures aux plus petites échelles présentes à la surface de la mer, toutes les échelles de la mer sont prises en compte dans la distribution de *Cox and Munk* [1954]. Notre modèle n'étant applicable que dans le cas de vagues de gravité, il ne peut décrire les vagues de capillarité inférieures à environ 5cm et, ici, la comparaison avec la distribution de *Cox and Munk* [1954] ne serait pas significative. Afin de tester la forme de notre distribution nous nous servons d'une récente campagne de mesures opérée par *Vandemark et al.* [2004].

En utilisant un jeu de trois lasers formant à la surface de la mer un trièdre de côté ≈ 2 m, ils déduisent une distribution des pentes omnidirectionnelles filtrées par leur système. La principale conclusion tirée de cette étude porte sur la valeur du kurtosis des pentes qui permet de quantifier la non-Gaussianité. Les valeurs trouvées expérimentalement sont très éloignées de la valeur qu'aurait donné une distribution Gaussienne et ils l'expliquent notamment par des effets importants de directionnalité mais aussi de nonlinéarité.

Afin de quantifier ces deux effets, notons $P_{2-omni}(S)$ la distribution des pentes omnidirectionnelles, c'est à dire la distribution des amplitudes $S = |\nabla \mathbf{h}|$. Pour une distribution Gaussienne isotrope de variance σ_2^2 , P_{2-omni} est la distribution de Rayleigh avec le paramètre σ_2 :

$$P_{2-omni}(S) = \frac{S}{\sigma_2^2} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad (2.2.32)$$

dont le kurtosis est $\lambda'_4 = 3.245$. Pour une distribution Gaussienne quelconque avec un ratio de pentes directionnelles carrées moyennes $\rho^2 = \sigma_{200}^2/\sigma_{020}^2$ et une mss totale de σ_2^2 , le n^{ème} moment $M_n = \langle S^n P_{omni}(S) \rangle$ de la distribution directionnelle des pentes s'écrit :

$$M_n = \frac{\sigma_2^n}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} d\theta \left[\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \right]^{-(1+n/2)} R_n \quad (2.2.33)$$

où R_n est le n^{ème} moment de la distribution normalisée de Rayleigh ($S \exp(-S^2/2)$). La variation du kurtosis des pentes avec le paramètre ρ peut être estimée numériquement. Un maximum de $\lambda'_4 = 4.166$ est obtenu pour $\rho = 3$ et un minimum à $\rho = 1$ est obtenu pour la distribution de Rayleigh ($\lambda'_4 = 3.245$). Nous pouvons dire, à priori, que les valeurs de kurtosis variant entre 4.5 et 6 obtenues par [Vandemark et al. \[2004\]](#) ne peuvent pas être majoritairement expliquées par des effets directionnels.

Nous avons donc calculé l'excès de kurtosis des pentes directionnelles en fonction du vent dans le cadre du CWM avec un spectre d'Elfouhaily pleinement développé. Nous avons coupé la distribution à une valeur maximale de 1.7 correspondant à des vagues très cambrées (60 degré d'inclinaison). Pour les vents faibles et modérés ($U_{10} \leq 12$ m.s⁻¹) le quatrième moment reste quasiment insensible à l'effet de troncature. Nous avons vérifié auparavant que cette dernière n'affecte pas le calcul des moments de la distribution. Pour des vents plus forts, le quatrième moment devient plus sensible à la troncature et sa valeur augmente avec celle du seuil. Cependant nous savons que la transformation du CWM n'est plus valable pour les petites vagues de capillarité qui présentent les plus grandes pentes.

Cet excès de kurtosis des pentes ($\gamma = \lambda'_4 - 3$) est tracé sur la figure 2.4. Pour reproduire le filtrage des pentes réalisé par [Vandemark et al. \[2004\]](#), nous avons tronqué le spectre à $k_u = 6$ rad.m⁻¹. Les valeurs correspondant à cette simulation sont notées "Long gravity waves". Nous avons aussi tracé les valeurs obtenues avec un spectre d'Elfouhaily tronqué à $k_u = 200$ rad.m⁻¹ qui correspond à toutes les vagues de gravité ("Gravity-capillarity waves"). La ligne horizontale à $\gamma = 0.245$ est celle de la distribution de Rayleigh obtenue à partir d'une distribution Gaussienne isotrope des pentes. La ligne à $\gamma = 0.7$ correspond à l'estimation de [Cox and Munk \[1954\]](#) qui est indépendante du vent et identique pour les surfaces libres ("clean") et filtrées ("slick"). Nous pouvons constater que la prise en compte des nonlinéarités par le CWM augmente de manière très significative l'excès de kurtosis et les valeurs obtenues sont beaucoup plus proches de celles mesurées par [Vandemark et al. \[2004\]](#). Les valeurs obtenues dans le cadre d'un modèle linéaire et celles obtenues par [Cox and Munk \[1954\]](#) restent quant à elles proches de la distribution de Rayleigh.

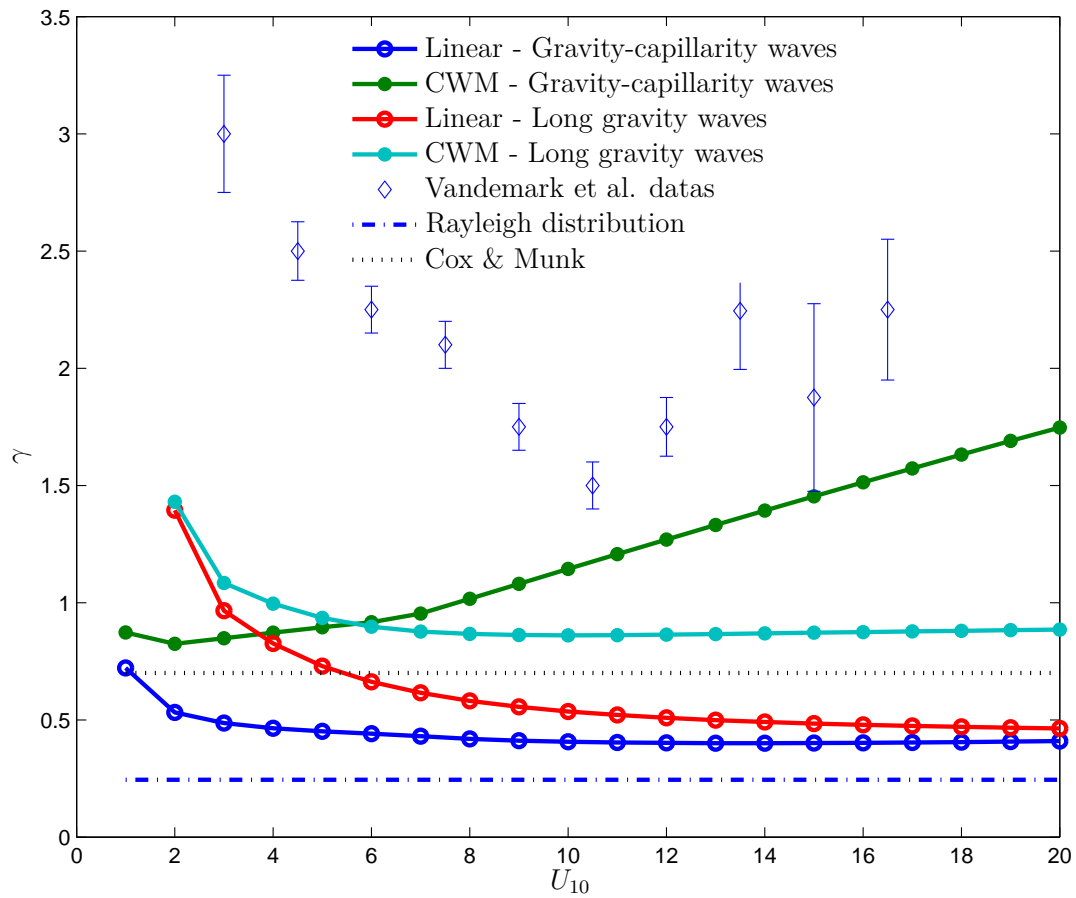


Figure 2.4 – Excès de kurtosis des pentes omnidirectionnelles comme fonction du vent.

Chapitre 3

Spectres

Sommaire

3.1 Calcul du spectre habillé	29
3.2 Déshabillage de spectre	36

Nous avons vu en partie 1.2.2 que le spectre orbital de la surface nonlinéaire est différent de son spectre de surface. Afin de maîtriser le spectre de surface du processus nonlinéaire il est nécessaire de connaître sa relation au spectre orbital. En effet, ce dernier étant "l'unique entrée" de notre modèle, il se doit de posséder une forme telle que le spectre de surface qui en découle possède une forme de spectre de mer réaliste. Dans la première section de ce chapitre nous détaillerons la relation existant entre les deux spectres en dimensions trois et deux et en deuxième section nous verrons une méthode permettant de déduire le spectre orbital du spectre de surface désiré.

3.1 Calcul du spectre habillé

Comme nous le verrons dans cette section, le spectre de surface découlant du spectre orbital se trouve enrichi dans les hautes fréquences. Nous utiliserons la terminologie déjà introduite par *Elfouhaily et al.* [1999] et utilisée dans la suite par *Soriano et al.* [2006]. Le spectre dit "déshabillé" (Γ) est celui initialement introduit dans le modèle linéaire (spectre orbital) et le spectre dit "habillé" ($\tilde{\Gamma}$) est celui de la surface nonlinéaire associée. En tenant compte des nonlinéarités, le spectre tend en particulier à s'habiller de hautes fréquences.

Afin de calculer l'expression du spectre habillé, nous nous intéressons aux propriétés statistiques d'ordre deux et principalement au calcul de la fonction caractéristique à deux points $\langle e^{iv\tilde{h}(\mathbf{r})-iw\tilde{h}(\mathbf{r}')}\rangle$. Le calcul de son expression analytique étant trop difficile, nous nous sommes contentés de la transformée de Fourier de sa valeur sur la diagonale ($u = w$) :

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{u}; v) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \left(\langle e^{iv(\tilde{h}(\mathbf{r})-\tilde{h}(\mathbf{0}))} \rangle - \langle e^{iv\tilde{h}(\mathbf{r})} \rangle \langle e^{-iv\tilde{h}(\mathbf{0})} \rangle \right) d\mathbf{r}. \quad (3.1.1)$$

En appliquant le changement de variable dû au déplacement $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r})$, on obtient

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{u}; v) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \left[\langle e^{iv(h(\mathbf{r})-h(\mathbf{0}))+i\mathbf{u}\cdot(\mathbf{D}(\mathbf{r})-\mathbf{D}(\mathbf{0}))} |J(\mathbf{r})||J(\mathbf{0})| \rangle - \left| \langle e^{ivh(\mathbf{r})+i\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r})} |J(\mathbf{r})| \rangle \right|^2 \right] \quad (3.1.2)$$

où J est ici aussi la matrice Jacobienne :

$$J(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 + \partial_x D_x(\mathbf{r}) & \partial_x D_y(\mathbf{r}) \\ \partial_y D_x(\mathbf{r}) & 1 + \partial_y D_y(\mathbf{r}) \end{bmatrix}.$$

En négligeant les termes quadratiques en pentes du Jacobien (d'ordre inférieur car le déplacement est supposé petit),

$$|J(\mathbf{r})||J(\mathbf{0})| \approx (1 + \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}))(1 + \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{0})) \quad (3.1.3)$$

et toutes les quantités aléatoires présentes dans l'équation (3.1.2) sont Gaussiennes et centrées. Notons X, Y et Z trois processus aléatoires Gaussiens centrés. Les calculs détaillés annexe A.2 nous permettent d'écrire :

$$\langle (1 + X)(1 + Y)e^{iH} \rangle = [\langle XY \rangle + (1 + i\langle XH \rangle)(1 + i\langle YH \rangle)] e^{-\frac{1}{2}\langle |H|^2 \rangle} \quad (3.1.4)$$

On applique ce résultat à l'équation (3.1.2) avec $X = \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})$, $Y = \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}')$ et $H = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{r}) - \mathbf{D}(\mathbf{r}')) + v(h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r}'))$ et on peut alors calculer :

$$\begin{cases} \langle |H|^2 \rangle &= v^2 S_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + |\mathbf{u}|^2 \Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \langle XY \rangle &= -\Delta C(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \langle XH \rangle &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla)C(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + vS_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/2 \\ \langle YH \rangle &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla)C(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - vS_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/2 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

avec (détails des calculs en annexe A.1.2)

$$\begin{cases} S_0(\mathbf{r}) &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{dk}' \Gamma(\mathbf{k}') [1 - e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}}] \\ S_1(\mathbf{r}) &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{dk}' |\mathbf{k}'| \Gamma(\mathbf{k}') [1 - e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}}] \\ \Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{dk}' (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \Gamma(\mathbf{k}') [1 - e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}}] \\ \sigma_{\mathbf{u}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{dk}' (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \Gamma(\mathbf{k}'). \end{cases} \quad (3.1.6)$$

L'équation (3.1.2) peut alors se réécrire :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{u}; v) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{dr} e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} \left[\exp \left(-\frac{v^2}{2} S_0 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \Phi_{\mathbf{u}} \right) \times \left((1 - i\mathbf{u} \cdot \nabla C)^2 - \Delta C + \frac{v^2}{4} S_1^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - (1 + v^2 \sigma_1^4) \exp \left(-v^2 \sigma_0^2 - |\mathbf{u}|^2 \sigma_{\mathbf{u}}^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

où ∇C and ΔC sont respectivement le gradient et le Laplacien de la fonction de corrélation. La dépendance en la variable d'espace \mathbf{r} est implicite. L'évaluation directe de la dérivée seconde en v de (3.1.1) prise en $v = 0$ nous donne

$$\left. \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\mathbf{k}, v)}{\partial v^2} \right|_{v=0} = 2 \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{C}(\mathbf{r}) \mathbf{dr} \quad (3.1.8)$$

$$= 8\pi^2 \tilde{\Gamma}(\mathbf{k}). \quad (3.1.9)$$

D'où

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{k}) = \frac{1}{8\pi^2} \left. \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}(\mathbf{k}, v)}{\partial v^2} \right|_{v=0}. \quad (3.1.10)$$

Le calcul analytique de (3.1.10) mène alors à :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{dr} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left\{ -(\sigma_1^4 - \sigma_0^2) e^{-|\mathbf{k}|^2 \sigma_{\mathbf{k}}^2} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{-S_0}{2} \left((1 - i\mathbf{k} \cdot \nabla C)^2 - \Delta C \right) + \frac{S_1^2}{4} \right] e^{-\frac{|\mathbf{k}|^2}{2} \Phi_{\mathbf{k}}} \right\} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

et son développement basse fréquence permet de réduire l'expression à :

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(\mathbf{k}) = & \Gamma(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} |\mathbf{k}|^2 \int d\mathbf{k}' \Gamma(\mathbf{k}') \left\{ \Gamma(\mathbf{k}'') - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \Gamma(\mathbf{k}) \right\} \\ & + \int d\mathbf{k}' |\mathbf{k}'| \Gamma(\mathbf{k}') \Gamma(\mathbf{k}'') |\mathbf{k}''| \left[(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'')^2 - \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'' \right] - 2 \int d\mathbf{k}' |\mathbf{k}| |\mathbf{k}'| (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \Gamma(\mathbf{k}') \Gamma(\mathbf{k}),\end{aligned}\quad (3.1.12)$$

avec $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$.

Ce développement basse fréquence permet d'éviter de calculer les fonctions de corrélations de l'expression (3.1.11) et leur intégration rendue difficile par leur caractère oscillant.

Nous allons maintenant regarder l'influence de la transformation sur le spectre des élévations. Dans la suite, le spectre habillé est calculé à partir de l'équation (3.1.11) en développant les fonctions de corrélation selon les coordonnées polaires (voir annexe C.1). Afin de quantifier l'effet des nonlinéarités sur le spectre des hauteurs, je trace sur les figures 3.1 et 3.2 les courbures directionnelles $2\pi k^4 \Gamma(\mathbf{k})$ dans les directions longitudinale (upwind) et transverse (crosswind) au vent ainsi que la courbure omnidirectionnelle B et la fonction d'étalement Δ des spectres habillés et déshabillés pour différents vents. Les spectres d'origine (orbitaux) sont pris égaux au spectre d'Elfouhaily. Pour ce faire le spectre habillé est supposé décrit par un développement azimutal d'ordre 2, ainsi que le spectre déshabillé :

$$2\pi |\mathbf{k}|^4 \tilde{\Gamma}(\mathbf{k}) = \tilde{B}(k)(1 + \tilde{\Delta}(k) \cos(2\phi_{\mathbf{k}})). \quad (3.1.13)$$

Ici \tilde{B} et $\tilde{\Delta}$ sont respectivement la courbure omnidirectionnelle et la fonction d'étalement habillées et $\phi_{\mathbf{k}}$ est l'angle azimutal de \mathbf{k} par rapport à la direction du vent. La courbure ainsi que la fonction d'étalement sont trouvées à partir de l'évaluation du spectre habillé aux trois angles ($\phi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$) :

$$\tilde{B}(k) = 2\pi k^4 \tilde{\Gamma}_{\phi=\pi/4}(k) \quad \text{et} \quad \tilde{\Delta}(k) = \frac{\tilde{\Gamma}_{\phi=0}(k) - \tilde{\Gamma}_{\phi=\pi/2}(k)}{\tilde{\Gamma}_{\phi=0}(k) + \tilde{\Gamma}_{\phi=\pi/2}(k)} \quad (3.1.14)$$

L'intégrale (3.1.11) fait intervenir de nombreuses fonctions oscillantes et demande une intégration numérique méticuleuse. Lorsque les nombres d'onde restent faibles ($k\sigma_0 \ll 1$), nous pouvons utiliser l'équation (3.1.12). Lorsque les nombres d'onde deviennent grands ($k\sigma_0 \gg 1$) l'exponentielle présente dans l'intégrande amortit très rapidement ses oscillations et il n'est plus nécessaire de calculer les fonctions de corrélation sur de grandes longueurs. Dans la région intermédiaire où aucune des deux méthodes n'est valide nous avons interpolé de manière exponentielle (linéaire en échelle logarithmique) la différence des courbures et fonctions d'étalement habillées et déshabillées.

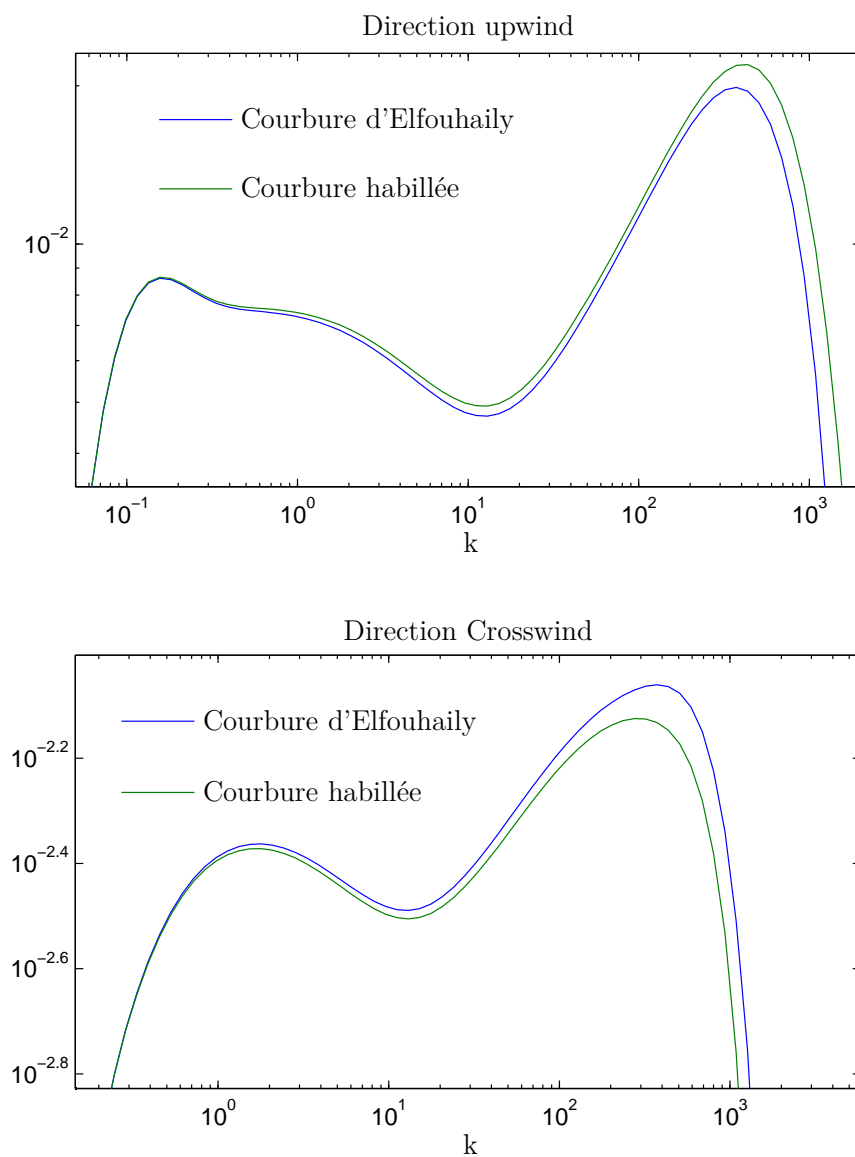


Figure 3.1 – *Courbure directionnelle d'Elfouhaily et sa version habillée ($U_{10} = 11 \text{ m.s}^{-1}$).*

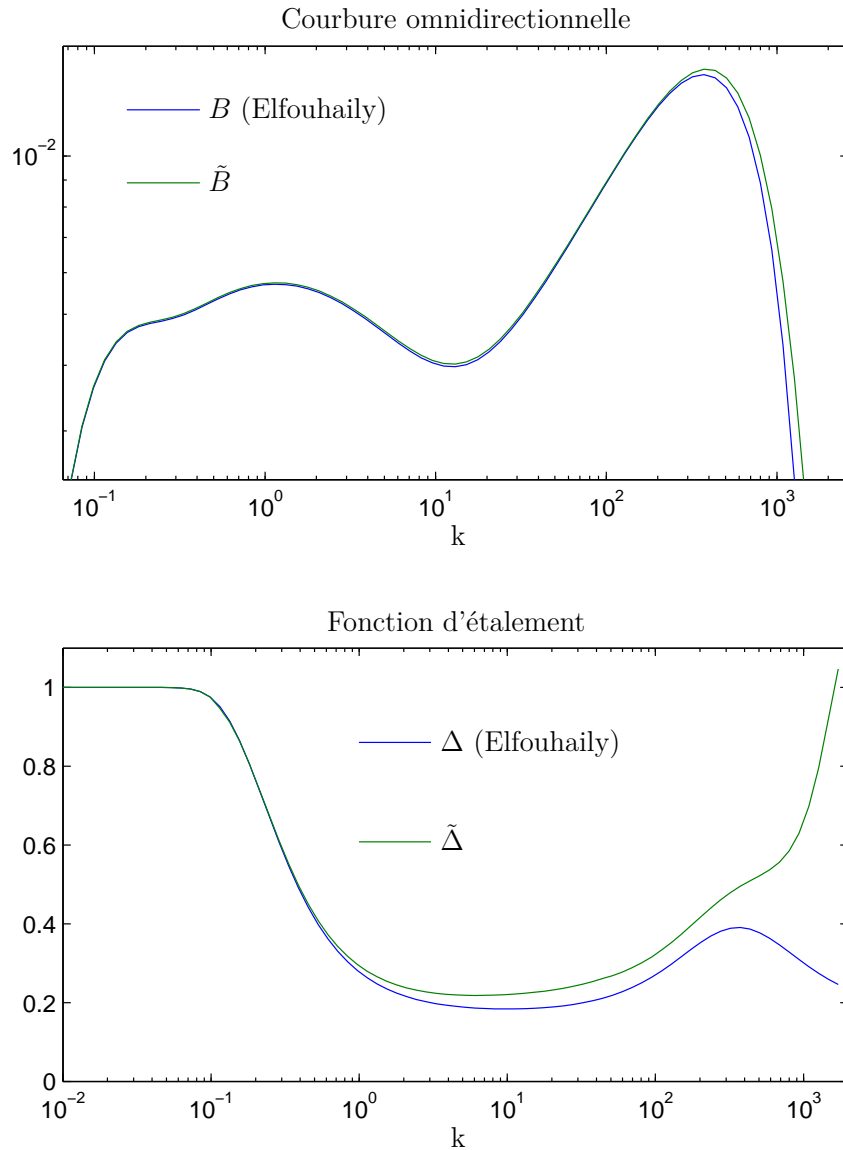


Figure 3.2 – *Courbure omnidirectionnelle et fonction d'étalement d'Elfouhaily et leur version habillées ($U_{10} = 11 \text{ m.s}^{-1}$).*

On peut voir clairement sur les courbes 3.1 et 3.2 que les nonlinéarités enrichissent le spectre en hautes fréquences. Un vent plus fort entraîne plus de grandes vagues (faible nombre d'onde) de forte amplitude. Ces grandes vagues, très directives, viennent moduler les petites vagues dans le sens du vent, leur ajoutant ainsi de la directivité. La figure 3.1 montre que l'énergie est transmise des grandes vagues vers les petites et de la direction crosswind à la direction upwind (énergie du spectre habillé plus faible dans la direction transverse mais supérieure dans la direction du vent). Cet effet est d'autant plus fort qu'il y a de vent et donc de grandes vagues directives. Pour des vents faibles, les interactions nonlinéaires sont plus faibles et nous retrouvons le caractère Gaussien de la surface. L'augmentation brutale de la fonction d'étalement au grands nombres d'onde s'explique par l'apparition de nouvelles fréquences spatiales seulement dans la direction longitudinale au vent. Cette augmentation n'est cependant pas gênante car la courbure associée à ces petites vagues est extrêmement faible quel que soit le vent.

Spectre en dimension deux Afin de comparer le CWM avec les théories classiques décrivant le spectre d'ordre supérieur nous reportons ici les développements précédents ramenés en dimension deux.

L'équation 3.1.11 se ramène à :

$$\tilde{\Gamma}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} \left\{ e^{-k^2 \sigma_0^2} (\sigma_0^2 - \sigma_1^4) - e^{-\frac{1}{2} k^2 S_0} \left[\frac{1}{2} S_0 (1 - 2ikC' - C'' - k^2 C'^2) - \frac{1}{4} S_1^2 \right] \right\} \quad (3.1.15)$$

et son développement basse fréquence s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(k) = & \Gamma(k) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \Gamma(k') \left\{ k^2 \Gamma(k - k') - 2k^2 \Gamma(k) \right\} \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \Gamma(k') \Gamma(k - k') [|k'| |k - k'| - k'(k - k')] \\ & - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk' |k'| |k| \Gamma(k) \Gamma(k'). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Comparaison avec Weber & Barrick En 1977, dans leurs papiers compagnons [Weber and Barrick \[1977\]](#); [Barrick and Weber \[1977\]](#) ont étendu leur théorie nonlinéaire des surfaces de mer aléatoires aux spectres continus. La méthode adoptée ressemble à celle de [Longuet-Higgins \[1963\]](#) mais le développement perturbatif est effectué sur les composantes de Fourier de la surface. Celle ci est écrite sous la forme :

$$\tilde{h}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{k} \int_{\mathbb{R}} d\omega \hat{h}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.1.17)$$

et le développement perturbatif :

$$\hat{h}(\mathbf{k}, \omega) = h_1(\mathbf{k}, \omega) + h_2(\mathbf{k}, \omega). \quad (3.1.18)$$

Le premier terme correspond aux vagues libres se propageant selon la relation de dispersion linéaire $\omega = \sqrt{g |\mathbf{k}|}$:

$$h_1(\mathbf{k}, \omega) = h_1^+(\mathbf{k}) \delta(\omega - \sqrt{g |\mathbf{k}|}) + h_1^-(\mathbf{k}) \delta(\omega + \sqrt{g |\mathbf{k}|}), \quad (3.1.19)$$

et le second s'écrit :

$$h_2(\mathbf{k}, \omega) = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\omega_1 d\omega_2 A(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) h_1(\mathbf{k}_1, \omega_1) h_1(\mathbf{k}_2, \omega_2). \quad (3.1.20)$$

A est donné par :

$$\frac{1}{2} \left(|\mathbf{k}_1| + |\mathbf{k}_2| + \sqrt{|\mathbf{k}_1| |\mathbf{k}_2|} (1 - \hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}}_2) \frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| + \Omega_{12}^+}{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| - \Omega_{12}^+} \right), \quad (3.1.21)$$

où Ω_{12}^+ est donné dans (1.3.41), et $A = 0$ quand $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$ et $\omega_2 = -\omega_1$.

Afin de comparer avec le “Choppy Wave Model” nous considérons une surface figée, disons à $t = 0$:

$$\tilde{h}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{k} [\hat{h}_1(\mathbf{k}) + \hat{h}_2(\mathbf{k})] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.1.22)$$

avec

$$\hat{h}_1(\mathbf{k}) = [\hat{h}_1^+(\mathbf{k}) + \hat{h}_1^-(\mathbf{k})] \quad (3.1.23)$$

et

$$h_2(\mathbf{k}) = \sum_{s_1, s_2 = \pm 1} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 A(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) h_1^{s_1}(\mathbf{k}_1) h_1^{s_2}(\mathbf{k}_2) \quad (3.1.24)$$

En notant Γ et $\tilde{\Gamma}$ les spectres en nombre d'onde de premier ordre et d'ordre supérieur :

$$\begin{aligned} \langle h_1(\mathbf{k}_1) h_1(\mathbf{k}_2) \rangle &= \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \Gamma(\mathbf{k}_1), \\ \langle \tilde{h}(\mathbf{k}_1) \tilde{h}(\mathbf{k}_2) \rangle &= \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \tilde{\Gamma}(\mathbf{k}_1), \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

nous pouvons établir facilement

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{k}) = \Gamma(\mathbf{k}) + \int d\mathbf{k}_1 \Pi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_2) \Gamma(\mathbf{k}_1) \Gamma(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1), \quad (3.1.26)$$

avec

$$\Pi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 2 |A(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|^2. \quad (3.1.27)$$

En dimension deux le noyau se réduit à :

$$\Pi(k_1, k_2) = \frac{1}{2} (|k_1| + |k_2|)^2 \quad (3.1.28)$$

et par suite nous déduisons

$$\tilde{\Gamma}(k) = \Gamma(k) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' k^2 \Gamma(k') \Gamma(k - k') \quad (3.1.29)$$

qui est le premier terme dans l'intégrande du développement basse fréquence (3.1.16) du CWM. Comme le montre plus tard [Creamer et al. \[1989\]](#), ce seul terme mène à la divergence de la correction d'ordre deux du spectre. Celle-ci s'explique par le fait que l'ordre deux décrit par Weber & Barrick est incomplet.

Comparaison avec la théorie de Creamer Creamer utilise la transformation des variables canoniques des équations de mouvement (élévation et potentiel des vitesses) pour générer des surfaces nonlinéaires. Sa méthode est basée sur la troncature d'Hamiltonien et se limite, tout comme le CWM, au vagues de gravité. Afin de comparer notre modèle au développement de Creamer, nous nous plaçons à nouveau en dimension deux. Le processus nonlinéaire des élévations s'écrit :

$$\tilde{h}(x) = h(x) + \delta h(x), \quad (3.1.30)$$

où le terme correctif δh s'écrit sous sa transformée de Fourier :

$$\widehat{\delta h}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \left(\frac{e^{ikD} - 1}{|k|} - i \operatorname{sign}(k) D \right) \quad (3.1.31)$$

où D est la transformation de Hilbert de h . Cette expression n'est pas utilisable pour pousser la comparaison plus loin, cependant, à basses fréquences ($kD \ll 1$), l'exponentielle peut être développée :

$$\widehat{\delta h}(k) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \left(-\frac{|k|}{2} D^2 - \frac{i}{6} k^2 \operatorname{sign}(k) D^3 \right), \quad (3.1.32)$$

menant à l'ordre le plus bas (Creamer *et al.* [1989], eq. 6.11) à :

$$\tilde{\Gamma}(k) = \Gamma(k) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dk' \left[k^2 \Gamma(k') \Gamma(k - k') - 2k^2 \Gamma(k) \Gamma(k') \right]. \quad (3.1.33)$$

Cette expression est égale à la première intégrale trouvée dans le développement du CWM. La figure 3.3 illustre la comparaison entre les corrections d'ordre deux des développements basses fréquences de Creamer, Barrick & Weber et le CWM. Le spectre utilisé est celui de Phillips en k^{-3} avec une troncature exponentielle à la fréquence de pic $k_p = 0.7 \text{ rad.m}^{-1}$ (correspondant à un vent de 3 m.s^{-1}) et à 120 rad.m^{-1} . Nous montrons le spectre linéaire (ordre 1) ainsi que les trois corrections. Celle de Weber & Barrick diverge rapidement quand celles de Creamer et du CWM restent proches et lentement divergentes.

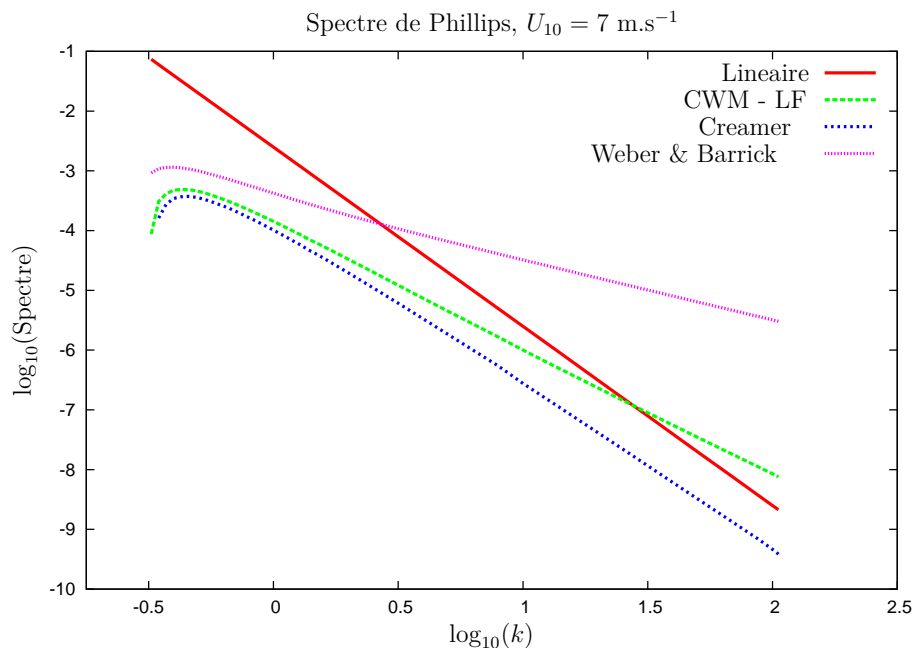


Figure 3.3 – Comparaison des développements basse fréquence des corrections au spectre déshabillé de Creamer, Weber & Barrick et CWM.

3.2 Déshabillage de spectre

Afin que le spectre habillé de la surface nonlinéaire soit réaliste, c'est à dire qu'il corresponde à celui mesuré à la surface de l'océan il est nécessaire d'injecter dans les équations (3.1.11) et (3.1.12) un spectre déshabillé différent. Compte tenu des conclusions de la section précédente il est nécessaire d'établir un spectre artificiel moins directif et contenant moins d'énergie pour les grands nombres d'onde. Après transformation, le spectre habillé possèdera alors les caractéristiques du spectre réaliste. Pour ce faire nous avons mis au point une méthode itérative simple et rapide permettant de remonter au spectre déshabillé voulu. Notons $(\tilde{B}_{\text{target}}, \tilde{\Delta}_{\text{target}})$ la courbure omnidirectionnelle et la fonction d'étalement habillées que nous envisageons d'obtenir (dans tous nos exemples ce seront celles d'Elfouhaily). La méthode récursive s'écrit :

$$B^{(0)} = \tilde{B}_{\text{target}}, \quad B^{(n+1)} = B^{(n)} - dB^{(n)}, \quad dB^{(n)} = \tilde{B}^{(n)} - \tilde{B}_{\text{target}} \quad (3.2.34)$$

$$\Delta^{(0)} = \tilde{\Delta}_{\text{target}}, \quad \Delta^{(n+1)} = \Delta^{(n)} - d\Delta^{(n)}, \quad d\Delta^{(n)} = \tilde{\Delta}^{(n)} - \tilde{\Delta}_{\text{target}}. \quad (3.2.35)$$

Les grandeurs $\tilde{B}^{(n)}$ et $\tilde{\Delta}^{(n)}$ de l'itération (n) sont obtenues par application des équations d'habillage d'un spectre de paramètres $B^{(n)}$ et $\Delta^{(n)}$. Un exemple est donné figure 3.4 où le spectre visé est celui d'Elfouhaily.

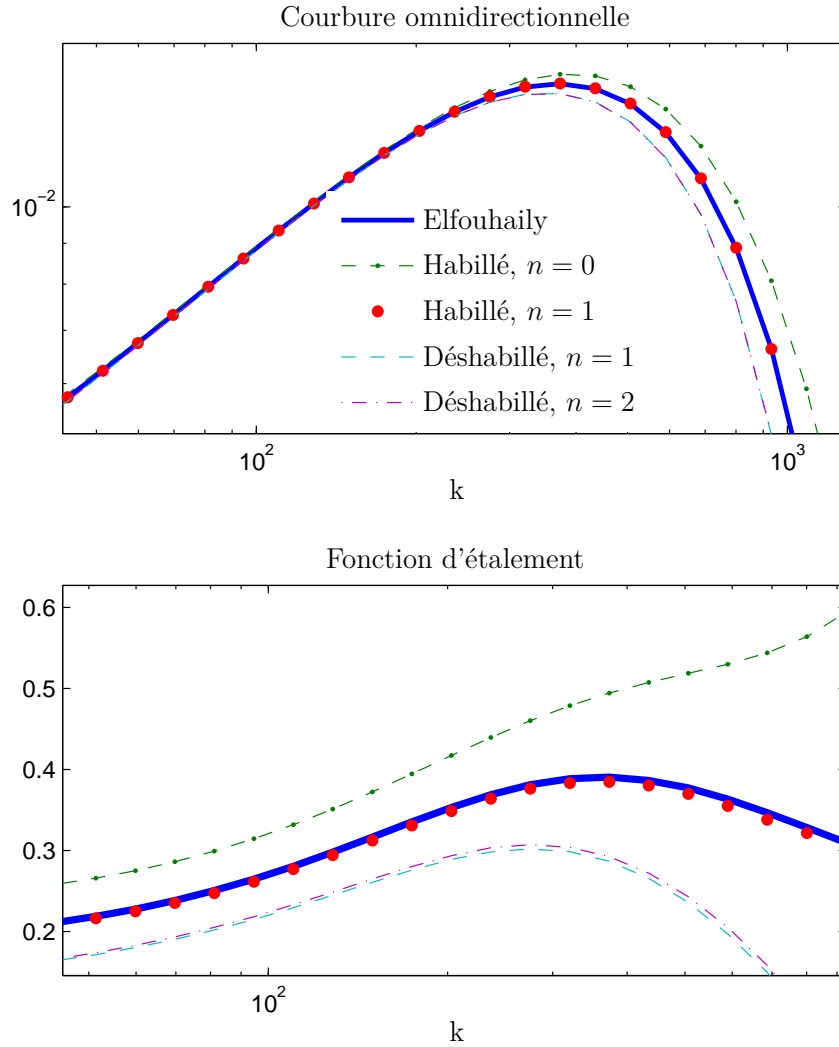
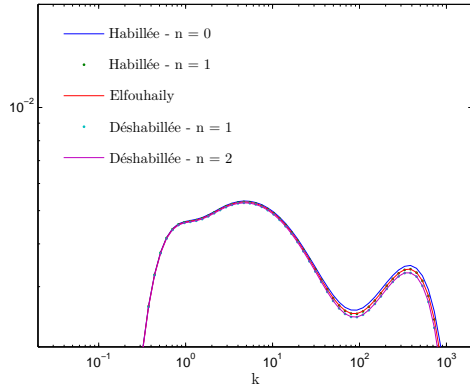


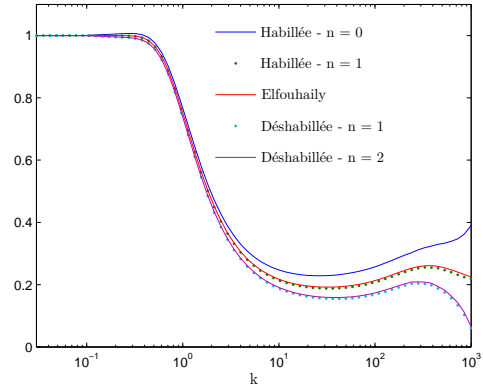
Figure 3.4 – *Procédure d'habillage* ($U_{10} = 11 \text{ m.s}^{-1}$).

La méthode converge en très peu d'itérations. Les figures 3.5(a) à 3.5(f) montrent la courbure des spectres habillés et déshabillés pour divers vents. C'est ce spectre que nous utiliserons dans toute les simulations de diffraction.

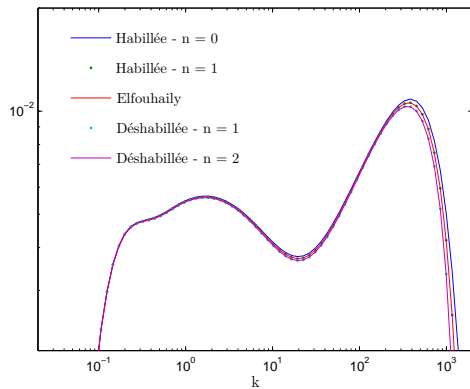
La partie déshabillée du spectre au nombre d'onde k peut être interprétée comme celle des vagues indépendantes se déplaçant à des vitesses définies par la relation de dispersion linéaire $\omega = \sqrt{g|\mathbf{k}|}$. La partie due à l'habillage correspondrait à celle des vagues de longueur d'onde $2\pi/k$ mais se déplaçant à des vitesses différentes de celle définie par la relation de dispersion linéaire. L'excès dû à l'habillage peut donc s'interpréter comme l'énergie des vagues liées.



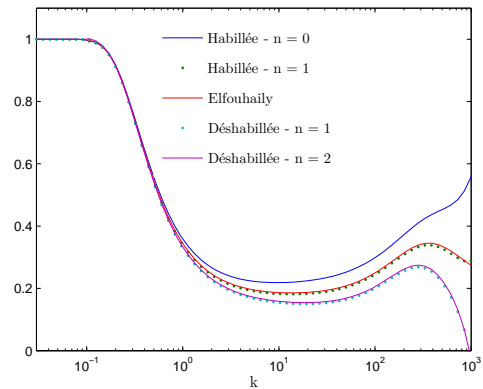
(a) Courbures habillée et déshabillée ($U_{10} = 5 \text{ m.s}^{-1}$)



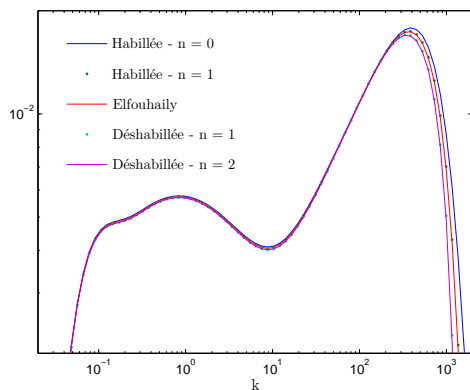
(d) Fonction d'étalement habillée et déshabillée ($U_{10} = 5 \text{ m.s}^{-1}$)



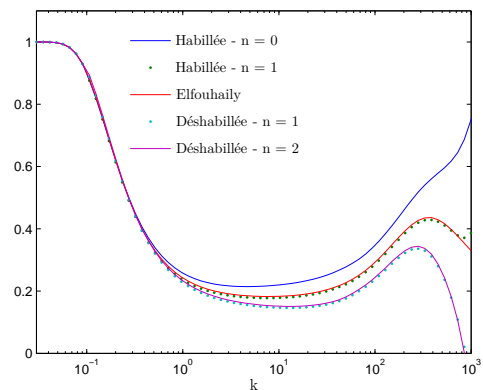
(b) Courbures habillée et déshabillée ($U_{10} = 9 \text{ m.s}^{-1}$)



(e) Fonction d'étalement habillée et déshabillée ($U_{10} = 9 \text{ m.s}^{-1}$)



(c) Courbures habillée et déshabillée ($U_{10} = 13 \text{ m.s}^{-1}$)



(f) Fonction d'étalement habillée et déshabillée ($U_{10} = 13 \text{ m.s}^{-1}$)

Figure 3.5 – Courbure et fonction d'étalement habillées et déshabillées pour différents vents.

Chapitre 4

Processus temporel

Sommaire

4.1 Statistique de premier ordre	39
4.2 Spectre temporel	40

La plupart des mesures réalisées en profondeur ou à la surface de la mer (bouées, capteurs de pression, mesures laser, ...) sont des mesures temporelles et locales et non des mesures instantanées d'une très grande surface. Le spectre spatial lui même est, en partie, une déduction de mesures temporelles. Dans cette partie, nous allons établir quelques propriétés statistiques utiles dans le domaine temporel. Pour plus de simplicité, et n'ayant pas l'utilité des propriétés temporelles du processus des pentes et des hauteurs dans l'étude de la diffraction électromagnétique, je me restreins au cas unidimensionnel pour cette étude.

4.1 Statistique de premier ordre

La même astuce que celle utilisée dans le domaine spatial dans la section 2.1.1 peut à nouveau être appliquée dans le domaine temporel. Nous nous en servons ici pour calculer la fonction de densité de probabilité des pentes temporelles $\partial_t \tilde{h}$:

$$\tilde{P}_2^t(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle e^{iv\partial_t \tilde{h}(x,t)} \rangle e^{-iv\tau} dv. \quad (4.1.1)$$

Les règles de dérivation nous permettent d'écrire :

$$\tilde{h}(x + D(x, t), t) = h(x, t) \quad (4.1.2)$$

$$\partial_t D \partial_t \tilde{h}(x + D(x, t), t) = \partial_t h(x, t) \quad (4.1.3)$$

$$\langle e^{iv\partial_t \tilde{h}} \rangle = \left\langle (1 + \partial_x D) e^{iv \frac{\partial_t h}{\partial_t D}} \right\rangle. \quad (4.1.4)$$

Si l'on suppose ici que toutes les vagues vont dans le même sens (vers les x positifs), ce qui correspond à un spectre $\Gamma(k, \omega)$ "unilatéral" le processus des hauteurs s'écrit :

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{i(kx - \text{sign}(k)\omega t)} \hat{h}(k). \quad (4.1.5)$$

et les processus dérivés :

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t h = \int_{\mathbb{R}} -i \operatorname{sign}(k) \sqrt{gk} \hat{h}(k) e^{i(kx - \operatorname{sign}(k)\omega t)} dk, \\ X_2 &= \partial_x D = \int_{\mathbb{R}} -|k| \hat{h}(k) e^{i(kx - \operatorname{sign}(k)\omega t)} dk, \\ X_3 &= \partial_t D = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{gk} \hat{h}(k) e^{i(kx - \operatorname{sign}(k)\omega t)} dk. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Les corrélations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \langle X_1^2 \rangle &= g\sigma_1^2, & \langle X_1 X_2 \rangle &= 0, \\ \langle X_2^2 \rangle &= \sigma_2^2, & \langle X_1 X_3 \rangle &= 0, \\ \langle X_3^2 \rangle &= g\sigma_1^2, & \langle X_2 X_3 \rangle &= -\sqrt{g} \sigma_{3/2}^2. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

La pdf de pentes temporelles (4.1.1) devient :

$$\tilde{P}_2^t(\tau) = \iiint \delta\left(\tau - \frac{X_1}{X_3}\right) (1 + X_2) P(X_1) P'(X_2, X_3) dX_1 dX_2 dX_3 \quad (4.1.8)$$

où P est la Gaussienne 1D de variance $g\sigma_1^2$ et P' la Gaussienne 2D de matrice de covariance :

$$N = \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sqrt{g}\sigma_{3/2}^2 \\ -\sqrt{g}\sigma_{3/2}^2 & g\sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

L'intégration en X_1 mène à :

$$\tilde{P}_2^t(\tau) = \iint |y|(1+x) P(\tau y) P'(x, y) dx dy. \quad (4.1.9)$$

Nous n'avons pas poussé le calcul plus loin mais le calcul numérique de ces intégrales est très facile. Il est simplement paramétrisé par les moments absolus du spectre spatial σ_n^2 . La figure 4.1 montre la fonction de densité de probabilité des pentes temporelles pour un vent de 10 m.s^{-1} avec un spectre d'Elfouhaily pleinement développé. Elle est comparée à celle des pentes temporelles obtenues dans le cas Gaussien. Nous pouvons voir que la queue de la distribution des pentes nonlinéaires possède une décroissance très lente et la distribution de Cauchy $p(\tau) = 1/\pi(1 + \tau^2)$ en est une excellente approximation. Une récente étude expérimentale de *Joelson and Néel [2008]* a montré que la distribution des pentes temporelles mesurée dans un bassin possèdent bien une queue à décroissance lente telle les distributions alpha-stables.

4.2 Spectre temporel

L'évolution de la surface océanique est essentiellement gouvernée par la relation de dispersion linéaire. Toutefois, les nonlinéarités viennent affecter cette évolution, principalement lorsque la mer devient agitée et que les grandes vagues viennent alors moduler les plus petites. La principale contribution à l'énergie du spectre temporel à la fréquence ω vient de la vague linéaire de taille $\lambda = 2\pi/k = 2\pi g/\omega^2$, mais d'autres échelles spatiales issues des interactions nonlinéaires se déplacent à la même vitesses et apportent leur contribution à la fréquence ω . Le simple exemple de la vague de Gerstner éclaire ce propos en montrant de manière évidente que plusieurs échelles spatiales se déplacent à la même vitesse. Ces vagues dites liées rendent alors ambiguë la notion de relation de dispersion.

De nombreuses expérimentations se basent sur l'enregistrement de l'évolution de la hauteurs des vagues en fonction du temps en un point donné. Si l'enregistrement est assez

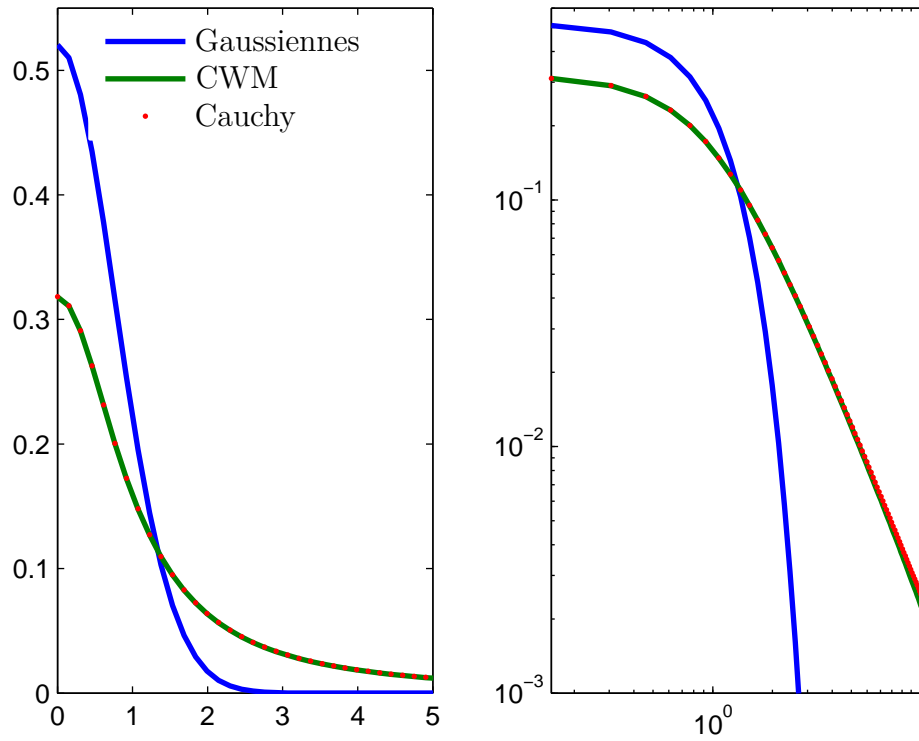


Figure 4.1 – Distribution des pentes temporelles $\partial_t \tilde{h}$ du CWM. La distribution Gaussienne sous-jacente est donnée pour référence (seule la partie positive de la distribution symétrique est montrée).

long, on peut en retirer une estimation du spectre temporel de la hauteur des vagues. Les premiers spectres spatiaux ont été déduits de ces mesures via la relation de dispersion permettant de relier spectre spatial et temporel sous la condition de linéarité. Plus tard, les mesures électromagnétiques et optiques ont montré que la forme du spectre spatial dérivée de cette manière ne correspondait pas à la réalité mettant ainsi en évidence l'insuffisance de la description linéaire.

Sous l'hypothèse de faibles déplacements, je calcule ici l'expression du spectre temporel. Je note C^t et Γ^t respectivement la fonction de corrélation temporelle et le spectre temporel.

$$\begin{cases} C^t(\tau) &= \langle h(0, \tau) h(0, 0) \rangle, \\ \Gamma^t(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\Omega\tau} C^t(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (4.2.10)$$

et leurs équivalents nonlinéaires \tilde{C}^t et $\tilde{\Gamma}^t$:

$$\begin{cases} \tilde{C}^t(\tau) &= \langle \tilde{h}(0, \tau) \tilde{h}(0, 0) \rangle - \langle \tilde{h}(0, 0) \rangle^2, \\ \tilde{\Gamma}^t(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\Omega\tau} \tilde{C}^t(\tau) d\tau \end{cases}. \quad (4.2.11)$$

Pour de petits déplacements nous pouvons écrire :

$$\tilde{h}(x, t) \approx h(x, t) - D(x, t) \partial_x h(x, t), \quad (4.2.12)$$

qui nous mène à

$$\tilde{C}(t_2 - t_1) = \langle (h_1 - D_1 \partial_x h_1) (h_2 - D_2 \partial_x h_2) \rangle - \sigma_1^4 \quad (4.2.13)$$

où

$$\begin{cases} h_1 &= h(0, t_1) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(k) e^{-i \operatorname{sign}(k) \omega t_1} dk, \\ \partial_x h_1 &= \partial_x h(0, t_1) &= i \int_{\mathbb{R}} k \hat{h}(k) e^{-i \operatorname{sign}(k) \omega t_1} dk, \\ D_1 &= D(0, t_1) &= i \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}(k) \hat{h}(k) e^{-i \operatorname{sign}(k) \omega t_1} dk. \end{cases} \quad (4.2.14)$$

et h_2, D_2 et $\partial_x h_2$ sont les mêmes quantités prises au temps t_2 . En développant, il vient :

$$\tilde{C}(\tau) = \langle D_1 D_2 \rangle \langle \partial_x h_1 \partial_x h_2 \rangle + \langle D_1 h_1 \rangle \langle D_2 \partial_x h_2 \rangle + \langle D_1 \partial_x h_2 \rangle \langle D_2 \partial_x h_1 \rangle - \sigma_1^4 \quad (4.2.15)$$

avec

$$\begin{cases} \langle D_1 D_2 \rangle &= C(\tau), \\ \langle \partial_x h_1 \partial_x h_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}} k^2 \Gamma(k) e^{-i \operatorname{sign}(k) \omega (t_1 - t_2)} dk = \frac{1}{g^2} \partial_\tau^4 C(\tau), \\ \langle D_1 \partial_x h_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}} |k| \Gamma(k) e^{-i \operatorname{sign}(k) \omega (t_1 - t_2)} dk = \frac{-1}{g} \partial_\tau^2 C(\tau), \\ \langle D_2 \partial_x h_1 \rangle &= \int_{\mathbb{R}} |k| \Gamma(k) e^{-i \operatorname{sign}(k) \omega (t_1 - t_2)} dk = \frac{-1}{g} \partial_\tau^2 C(\tau), \\ \langle D_1 \partial_x h_1 \rangle &= \sigma_1^2, \\ \langle D_2 \partial_x h_2 \rangle &= \sigma_1^2. \end{cases} \quad (4.2.16)$$

Soit finalement

$$\begin{cases} \tilde{C}(\tau) &= C(\tau) \left[1 + \frac{1}{g^2} \partial_\tau^4 C(\tau) \right] + \frac{1}{g^2} \left[\partial_\tau^2 C(\tau) \right]^2, \\ \tilde{\Gamma}^t &= \Gamma^t + \frac{1}{g^2} \left[\Gamma^t * (\Omega^4 \Gamma^t) + (\Omega^2 \Gamma^t) * (\Omega^2 \Gamma^t) \right]. \end{cases} \quad (4.2.17)$$

où Ω est la fréquence.

Comme le montre la figure 4.1 l'effet des nonlinéarités sur les distributions des grandeurs temporelles est aussi très important. De la même manière que le spectre spatial, l'équation (4.2.17) montre que le spectre en fréquences sera enrichi en hautes fréquences.

Chapitre 5

Génération de surfaces aléatoires

Sommaire

5.1 Surfaces figées	43
5.2 Evolution temporelle	49

5.1 Surfaces figées

La formulation du CWM permet de générer très facilement des échantillons de surfaces au prix de trois transformées de Fourier rapides. Une pour le processus des hauteurs $h(\mathbf{r})$, et les deux autres pour les déplacements horizontaux des particules $\mathbf{D}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{r}_{mn}) &= \mathcal{R}e \left[\sum_{ij} e^{i\mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{mn}} \sqrt{\Gamma(\mathbf{k}_{ij})} e^{i\varphi_{ij}} \right], \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}_{mn}) &= \mathcal{R}e \left[\sum_{ij} i \frac{\mathbf{k}_{ij}}{|\mathbf{k}_{ij}|} e^{i\mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{mn}} \sqrt{\Gamma(\mathbf{k}_{ij})} e^{i\varphi_{ij}} \right], \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

où Γ est le spectre orbital de la surface nonlinéaire et les φ_{ij} sont des phases aléatoires comprises dans $[0, 2\pi]$. La surface nonlinéaire est caractérisée par les couples de points $(\mathbf{r}_{mn} + \mathbf{D}(\mathbf{r}_{mn}), h(\mathbf{r}_{mn}))$. Un exemple de génération de surfaces linéaires et nonlinéaires associées (le spectre de la surface linéaire est égal au spectre orbital de la surface nonlinéaire) est représenté sur les figures 5.1 et 5.2. Le spectre directionnel d'Elfouhaily a été utilisé pour un vent de 15 m.s^{-1} . Les figures 5.1 et 5.2 sont des échantillons de $3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ prélevés sur des parcelles de $50 \text{ m} \times 50 \text{ m}$. Ceux-ci ont été générés sur une base de 8192×8192 points. Le spectre a été tronqué à $k_{max} = 500 \text{ rad.m}^{-1}$, correspondant à une longueur d'onde minimale de 1 cm et la surface a été échantillonnée à la fréquence de Shannon $2k_{max}$. Comme la transformation est basée sur un déplacement horizontal des particules, la surface nonlinéaire est donnée sur une grille non régulière comme l'illustrent les figures 5.3 et 5.4 qui sont des vues verticales des surfaces 5.1 et 5.2. On peut voir à l'intérieur du cercle rouge que les crêtes sont plus pointues sur la surface nonlinéaire. Les particules d'eau proche de la grande vagues ont été attirées vers la crête. L'observation des creux révèle aussi un aplatissement lors de la transformation et de manière générale, la surface linéaire revêt un aspect moins rugueux. Nous avons appliqué un seuil afin de voir l'effet de la transformation sur la taille des vagues et nous pouvons constater que la pointe de la vague encerclée de rouge a bien été affinée suggérant une augmentation de la pente locale puisque la hauteur de la vague n'a pas changé. La grande vague a droite (coupée par le seuil) se trouve elle aussi rétractée.

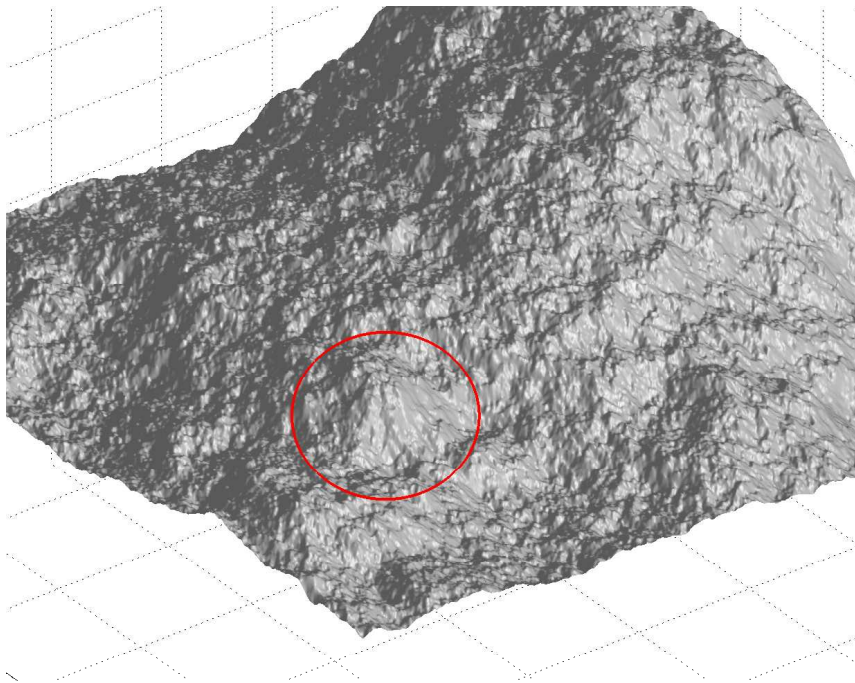


Figure 5.1 – *Surface linéaire N° 1.*

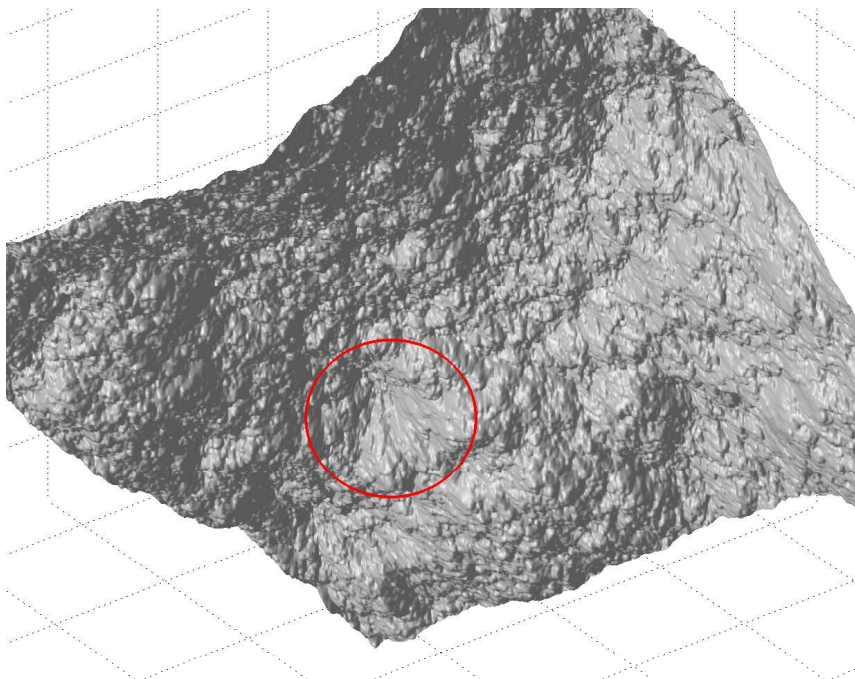
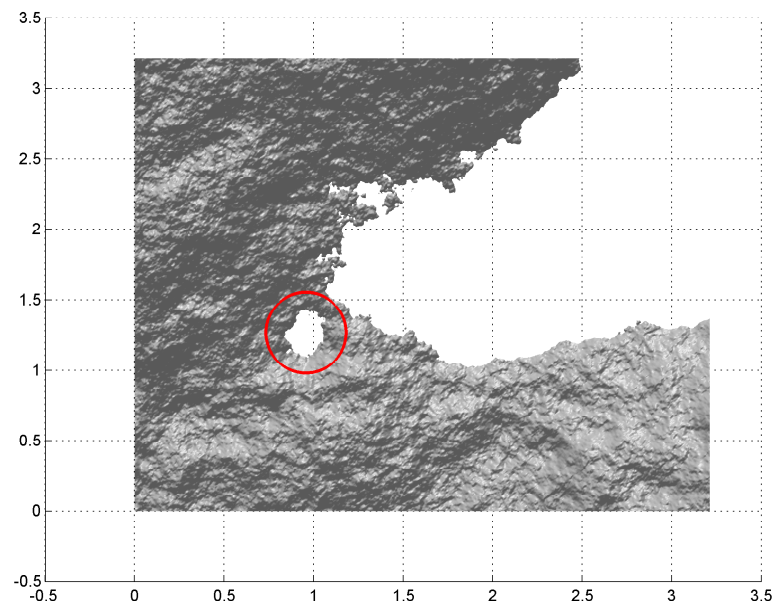
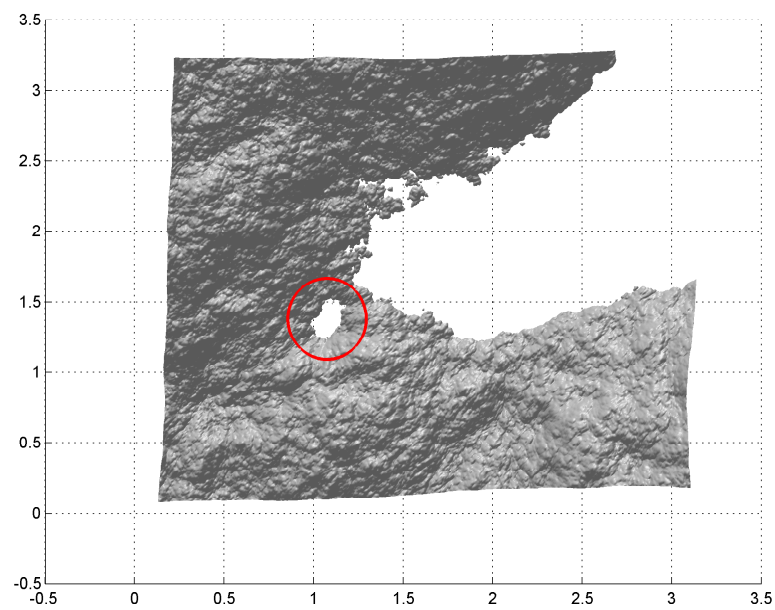


Figure 5.2 – *Surface nonlinéaire N° 1.*

Les figures 5.5 et 5.6 sont des surfaces linéaires et nonlinéaires avec des échelles égales sur les axes verticaux et horizontaux permettant une visualisation réaliste des nonlinéarités.

Figure 5.3 – *Surface linéaire N° 1.*Figure 5.4 – *Surface nonlinéaire N° 1.*

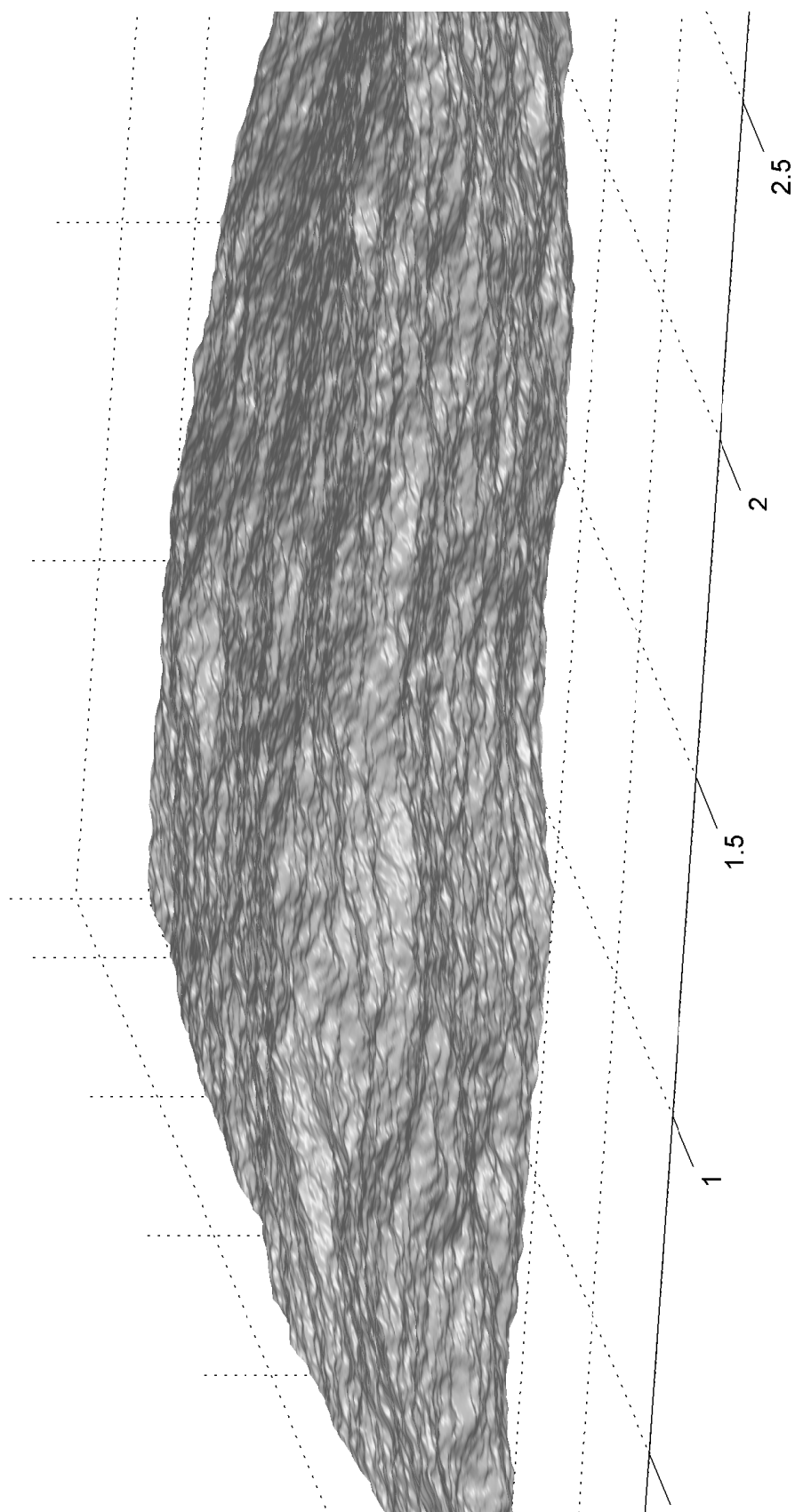


Figure 5.5 – *Surface linéaire N° 2.*

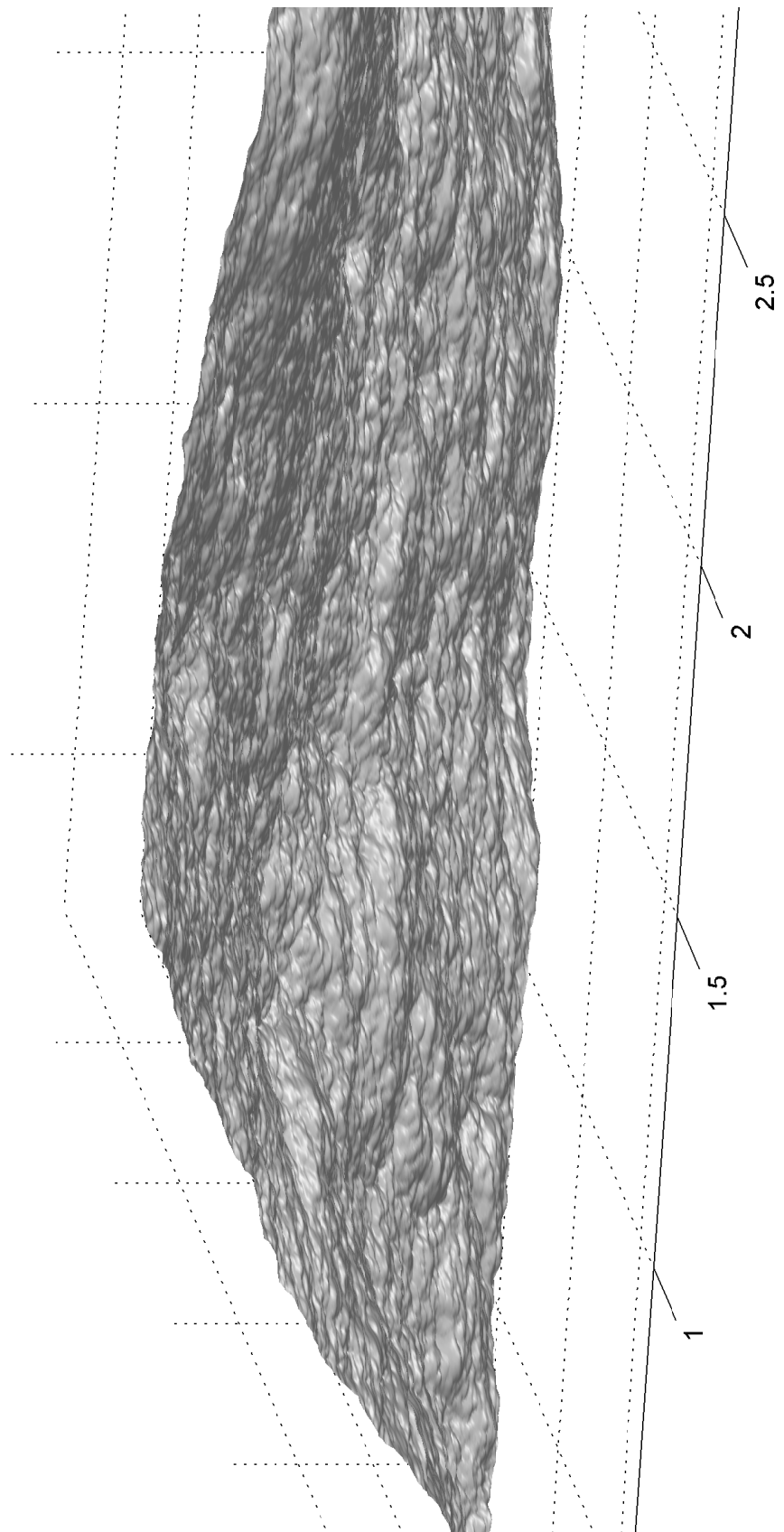


Figure 5.6 – *Surface nonlinéaire N° 2.*

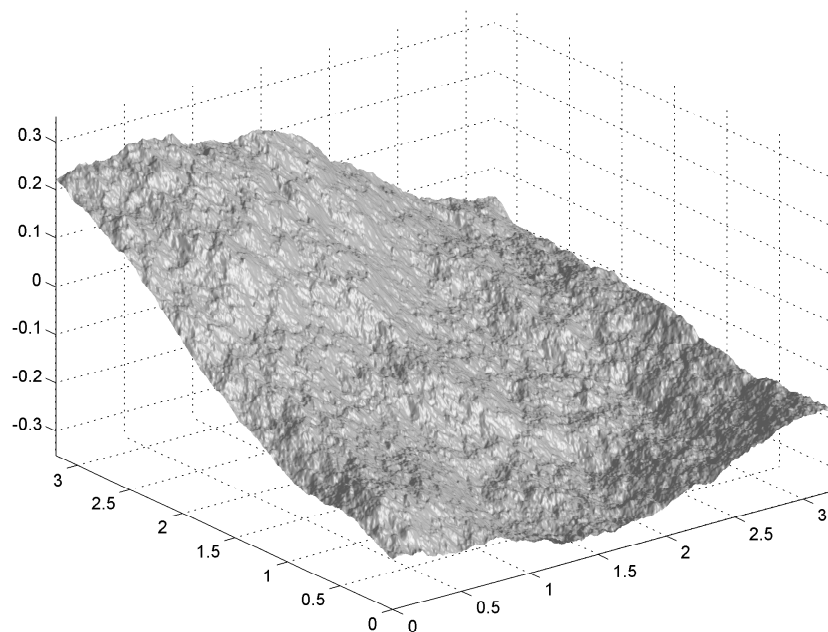


Figure 5.7 – *Surface linéaire N° 3.*

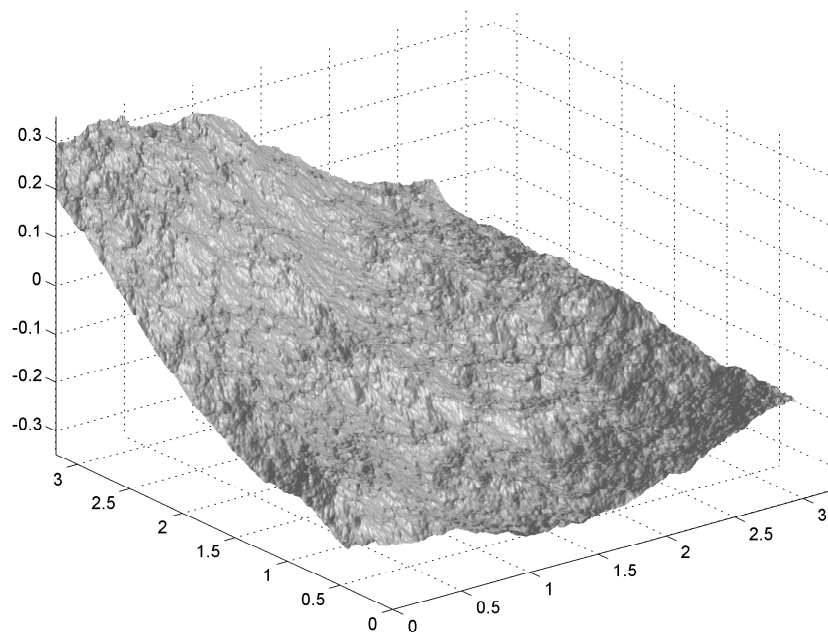


Figure 5.8 – *Surface nonlinéaire N° 3.*

Deux autres surfaces linéaire et nonlinéaire peuvent être comparées sur les figures 5.7 et 5.8 où les mêmes observations peuvent être faites. En particulier, le fait que les petites

vagues se retrouvent plus piquées, principalement en haut des crêtes des grandes vagues et plus aplaties dans leurs creux.

5.2 Evolution temporelle

L'évolution des surfaces nonlinéaires est un problème non trivial de part l'absence de relation de dispersion bien définie. Toutefois, si l'on considère que le spectre de mer est pleinement développé et donc stable dans le temps, le déplacement horizontal est lui même fonction de t mais ne dépend pas des événements précédents. La surface nonlinéaire au temps t est obtenue par la transformation des abscisses de la surface linéaire au même temps. Ainsi il suffit de laisser évoluer la surface linéaire selon la relation de dispersion linéaire $\omega^2 = g|\mathbf{k}|$ et d'appliquer la transformation horizontale au même temps pour obtenir la nouvelle surface. Concrètement, un ajout à la phase originale φ_{ij} de $-\omega_{ij}t = \pm\sqrt{g|\mathbf{k}_{ij}|}t$ selon la direction de propagation des vagues dans la FFT (5.1.1) permet de générer la surface au temps t .

La figure 5.9 est un exemple d'évolution de surfaces 2D linéaire et nonlinéaire avec un spectre temporel unidirectionnel où toutes les vagues se déplacent dans la même direction. Le spectre choisi est toujours celui d'Elfouhaily pleinement développé pris à $U_{10} = 3 \text{ m.s}^{-1}$. La surface totale possède des fréquences comprises entre $k_{min} = 1.10^{-3} \text{ rad.m}^{-1}$ et $k_{max} = 100 \text{ rad.m}^{-1}$ et a été échantillonnée sur 4096 points. La figure 5.9 représente l'évolution temporelle des surfaces linéaire et nonlinéaire d'une parcelle de mer de 4 mètres appartenant à cette surface. Les surfaces ont été générées avec un pas temporel $\Delta t = 0.1$ seconde.

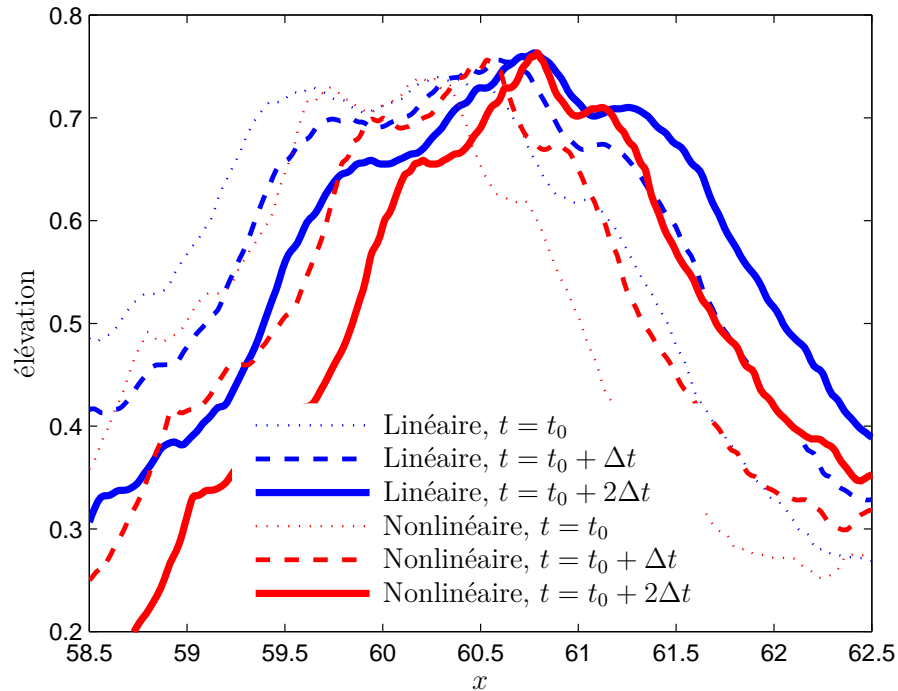


Figure 5.9 – Evolution temporelle d'une surface de mer 2D. $\Delta t = 0.1 \text{ s}$.

La version numérique de ce document permet de voir l'évolution temporelle des surfaces linéaire (figure 5.10) et nonlinéaire (figure 5.11) en trois dimensions ci-dessous. Ce sont des échantillons de $3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ prélevés sur des parcelles de $25 \text{ m} \times 25 \text{ m}$ qui ont été générés sur une base de 4096×4096 points. Le vent est de 10 m.s^{-1} et le spectre a été tronqué à $k_{max} = 500 \text{ rad.m}^{-1}$, correspondant à une longueur d'onde minimale de 1 cm . Les surfaces ont été échantillonnées à la fréquence de Shannon $2k_{max}$. Il est nécessaire de générer une grande surface et d'extraire une parcelle plus petite afin d'avoir des vagues plus grandes que la taille de la parcelle prélevée. La vidéo totale représente l'évolution des surfaces pendant 2.8 secondes. On peut voir que les vagues (en particulier la plus grande vague) se propage selon l'axe situé à gauche (qui est la direction du vent) et que la grande vague se déplace beaucoup plus vite que les petites. En prêtant une attention particulière au passage de la grande vague, on peut voir dans le cas de la surface nonlinéaire que les petites vagues sur la crête sont à ce moment beaucoup plus affinées que lorsqu'elles étaient dans le creux. On a aussi l'impression qu'elles se regroupent vers la cime de la grande vague et s'écartent ensuite lorsqu'elles sont dans le creux. Tous ces phénomènes de modulation des petites vagues par les grandes sont absents sur la vidéo de la surface linéaire.

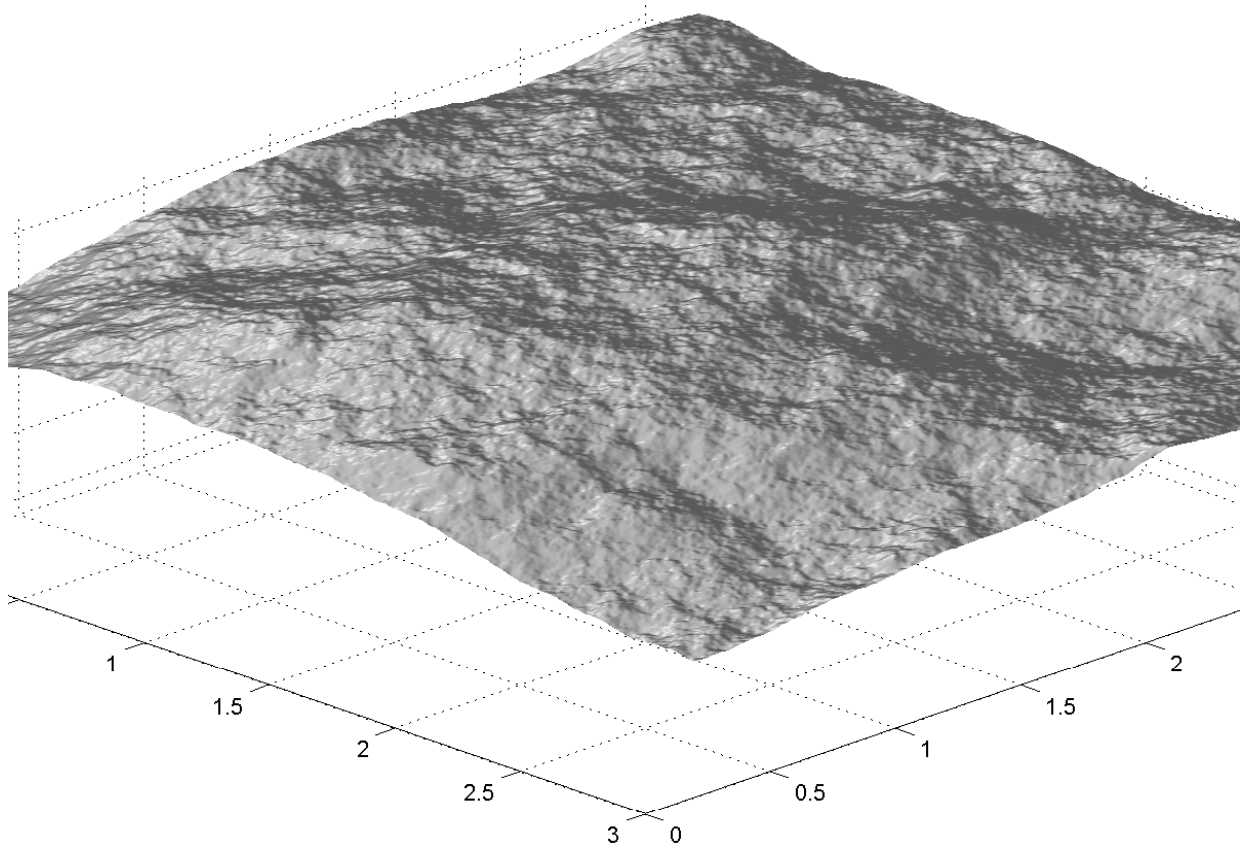


Figure 5.10 – Evolution temporelle d'une surface de mer 3D linéaire.

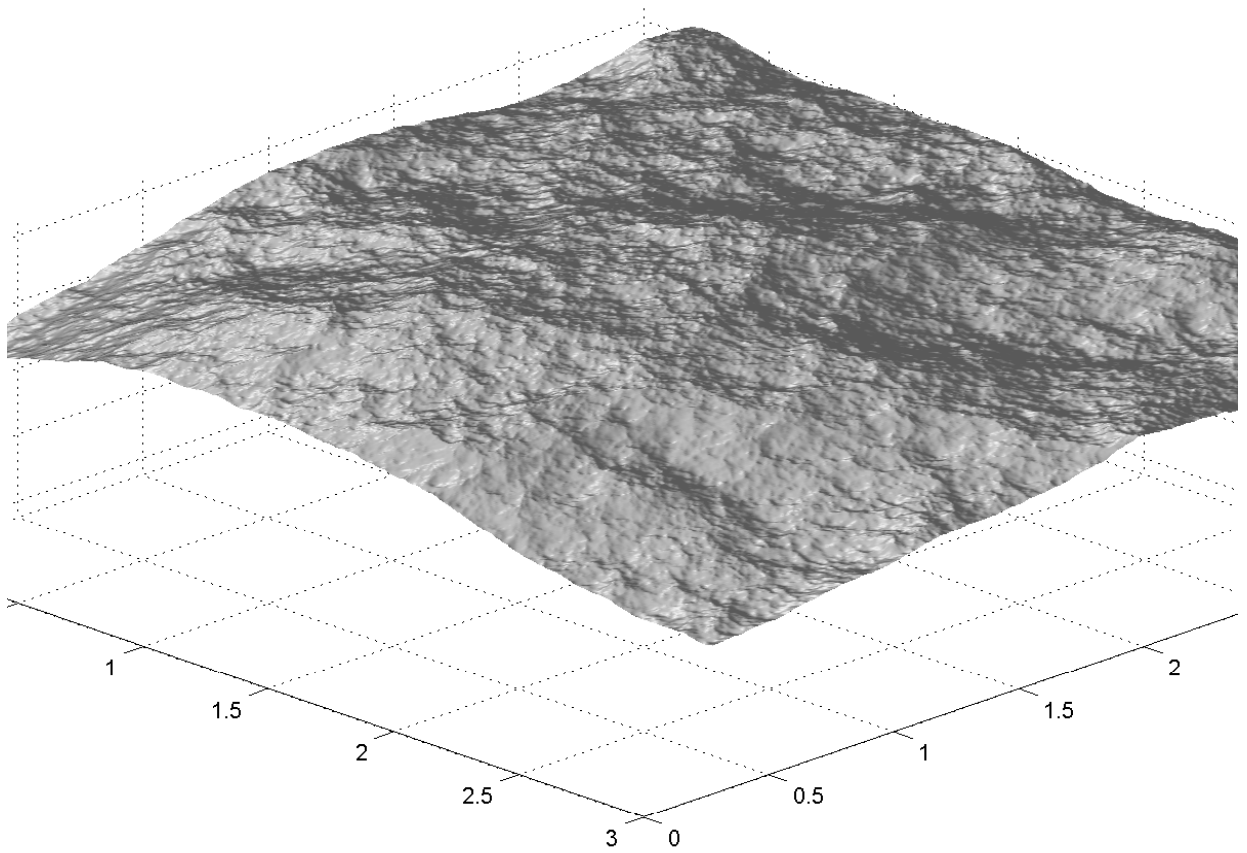


Figure 5.11 – *Evolution temporelle de la surface de mer 3D nonlinéaire correspondante.*

Deuxième partie

Modélisation électromagnétique

Pèr demanda l'impoussible

*Sabe proun que vous ai demanda l'impoussible.
Mai en de que servirias-ti
s'erias pas justamen lou soul
en quau se pòu tout demanda !*

— Henriette DIBON (Farfantello), *Lou Radèu*

Chapitre 6

Diffraction par des surfaces rugueuses

Sommaire

6.1	Modélisation et définitions	55
6.2	Diffraction dans l'approximation de Kirchhoff	57
6.3	Implémentation numérique et résultats	59
6.4	Optique Physique et Optique Géométrique	67
6.5	Calcul de l'émissivité	73

6.1 Modélisation et définitions

Dans le problème électromagnétique suivant, nous considérons une onde plane incidente monochromatique de longueur d'onde λ polarisée rectilignement et décrite par son champ électrique :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} \mathbf{E}_0 \quad (6.1.1)$$

où \mathbf{E}_0 est l'amplitude vectorielle du champ. Cette onde plane se propageant vers le bas selon la direction \mathbf{K}_0 est diffractée par la surface de la mer considérée comme une interface rugueuse séparant deux milieux homogènes. La géométrie du problème est représentée sur la figure 6.1.

La dépendance temporelle en $e^{-i\omega t}$ est implicite et les vecteurs sont décomposés selon une base horizontale et verticale comme suit :

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{k}_0 - q_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{k} + q \hat{\mathbf{z}}, \quad (6.1.2)$$

avec $q, q_0 > 0$ et $k_0^2 + q_0^2 = k^2 + q^2 = K^2 = (2\pi/\lambda)^2$. Nous définissons aussi le vecteur d'Ewald $\mathbf{Q} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_0$ et ses composantes horizontale : $\mathbf{Q}_H = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ et verticale : $Q_z = q + q_0$.

La base de polarisation fondamentale se définit alors de la manière suivante :

$$\mathbf{p}_V^\pm(\mathbf{k}) = \frac{k\hat{\mathbf{z}} \mp q\hat{\mathbf{k}}}{K}, \quad \mathbf{p}_H^\pm(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{k}} \quad (6.1.3)$$

où $\mathbf{p}_V^\pm(\mathbf{K})$ correspond à la polarisation verticale V (le champ électrique est contenu dans le plan $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{k}})$) et $\mathbf{p}_H^\pm(\mathbf{K})$ correspond à la polarisation horizontale H (le champ électrique est contenu dans le plan horizontal $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$). L'exposant $(+)$ correspond aux ondes montantes et $(-)$ aux ondes descendantes.

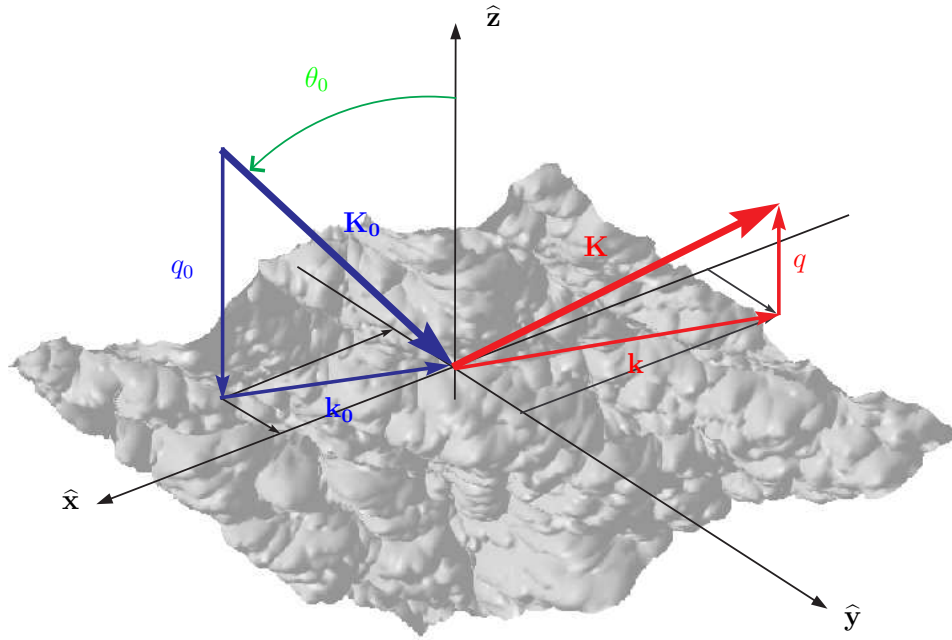


Figure 6.1 – Géométrie du problème de diffraction.

Le champ diffracté au dessus de la surface peut alors être décomposé en une superposition d'ondes planes sortantes de la manière suivante (développement de Rayleigh) :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}}{2\pi q} \mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + iqz} \mathbf{E}_0 \quad (6.1.4)$$

où $\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\hat{\mathbf{z}}$ et $\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ est le tenseur dyadique de diffraction qui peut s'écrire :

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \sum_{i,j=V,H} S_{ji}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \mathbf{p}_j^+(\mathbf{k}) \mathbf{p}_i^-(\mathbf{k}_0). \quad (6.1.5)$$

Ici les S_{ij} sont les éléments de la matrice de diffraction $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ décomposés sur la base de polarisation verticale et horizontale :

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \begin{bmatrix} S_{VV}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) & S_{VH}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \\ S_{HV}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) & S_{HH}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \end{bmatrix}.$$

A l'infini ($R \rightarrow \infty$), dans la direction de diffraction \mathbf{K} le champ diffracté est assimilé à une onde sphérique :

$$\mathbf{E}_s(R\hat{\mathbf{K}}) = \frac{e^{iKR}}{iR} \mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \mathbf{E}_0. \quad (6.1.6)$$

La grandeur communément utilisée en télédétection est la surface équivalente radar normalisée notée NRCS ("Normalized Radar Cross Section"). Elle se définit comme :

$$\Sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \lim_{A \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4\pi R^2 \left\langle \left| \left(\mathbf{E}_s(R\hat{\mathbf{K}}) - \langle \mathbf{E}_s(R\hat{\mathbf{K}}) \rangle \right) \cdot \mathbf{p}_j(\mathbf{k}) \right|^2 \right\rangle}{A |\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{p}_i(\mathbf{k}_0)|^2} \quad (6.1.7)$$

où A est la surface éclairée, i, j les polarisations considérées et où $\langle \rangle$ correspond aux moyennes d'ensemble. L'équation (6.1.6) permet alors d'écrire la NRCS plus simplement :

$$\Sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{4\pi \left\langle |S_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) - \langle S_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \rangle|^2 \right\rangle}{A} \quad (6.1.8)$$

Les amplitudes de diffraction S_{ij} dépendent de la surface de la mer, de la permittivité de l'eau, de la surface éclairée ainsi que de la polarisation.

Il existe de nombreuses méthodes exactes et approchées pour le calcul de la NRCS mais comme dans la plupart des problèmes physiques, toutes ont leur domaine de validité. Parmi l'éventail des possibilités, deux types de méthodes ont été retenues par la communauté qui travaille sur la diffraction des ondes par des surfaces rugueuses.

La méthode exacte Elle consiste en un calcul exact du champ diffracté par une surface déterministe. Les courants de surface sont calculés par différentes méthodes (éléments finis, méthodes intégrales, ...) puis on calcule le champ rayonné par ces courants. L'opération est répétée pour un grand nombre de surfaces et la NRCS est calculée en moyennant les résultats obtenus. C'est une méthode dite de Monte-Carlo. Elle présente l'avantage de calculer un champ exact mais nécessite de lourds calculs numériques. La méthode des moments nécessite de mailler la surface rugueuse et n'est généralement pas applicable dans le cas de surfaces marines qui comportent de nombreuses échelles allant du millimètre à plusieurs dizaines de mètres. Elle est donc généralement réservée aux problèmes où toutes les échelles de la surface peuvent être correctement maillées.

Les méthodes approchées Il existe de nombreuses méthodes approchées permettant de fournir la forme statistique de la matrice de diffraction. Celles-ci se basent généralement sur un certain nombre d'hypothèses concernant la surface et ses propriétés électromagnétiques. Les plus connues sont l'approximation du Plan Tangent dite de Kirchhoff (KA) (*Beckmann and Spizzichino* [1963], *Valenzuela* [1978]) et celle des petites perturbations (SPM) ou théorie de Bragg (*Rayleigh* [1896]). Récemment de nombreuses autres méthodes plus robustes et avec de plus larges domaines d'application ont fait leur apparition. Citons "Small Slope Approximation (SSA)" introduite par *Voronovich* [1985, 1994a, b] qui vise à réunir les approximations de KA et SPM, "Weighted Curvature Approximation" (WCA) (*Elfouhaily et al.* [2003a]; *Guérin et al.* [2004]; *Bourlier et al.* [2005]) prenant en compte la courbure locale de la surface, Local Weight Approximation (LWA) (*Dashen and Wurmser* [1991b, a]), "Local Curvature Approximation" (LCA) (*Elfouhaily et al.* [2003a, b]), "Reduced Curvature Approximation" (RCA) (*Mouche et al.* [2007a, b]), etc. Des méthodes permettant d'utiliser des approximations différentes pour les différentes échelles de la surface sont apparues sous le nom de méthodes à deux échelles (TSM pour "Two Scale Model") (*Wright* [1968]; *Valenzuela* [1978]; *Soriano and Guérin* [2008]). Pour une revue exhaustive des principaux avantages et inconvénients de la plupart de ces méthodes approchées nous pouvons nous référer à l'article d'*Elfouhaily and Guérin* [2004].

6.2 Diffraction dans l'approximation de Kirchhoff

Dans ce manuscrit, l'effort est porté sur l'influence de divers paramètres météo-océaniques sur le phénomène de diffraction et non sur la pertinence de telle ou telle méthode approchée. De ce fait, je me limiterai aux méthodes approchées les plus classiques ne prenant en compte que la diffusion simple. La méthode approchée de Kirchhoff est l'une d'entre elles. Elle fait partie des plus anciennes et des plus utilisées (*Beckmann and Spizzichino* [1963]). Elle se base sur un raisonnement intuitif de réflexion locale spéculaire de l'onde incidente. De ce fait, on la nomme aussi méthode du plan tangent. Elle se limite aux surfaces rugueuses présentant un rayon de courbure local grand devant la longueur d'onde. Elle est insensible à la polarisation et à la courbure de la surface.

Si je note A l'aire éclairée et définis la surface par ses coordonnées $(\mathbf{r}, h(\mathbf{r}))$, l'amplitude de diffraction dans l'approximation de Kirchhoff s'écrit :

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{\mathcal{K}}{Q_z} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_A d\mathbf{r} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{iQ_z h(\mathbf{r})}, \quad (6.2.9)$$

où \mathcal{K} est un noyau dépendant de la fréquence, de la permittivité de l'eau et des angles d'incidence et de diffraction. L'expression de ce noyau peut être trouvée dans *Elfouhaily and Guérin* [2004] ou en annexe D.1. L'intégrale de Kirchhoff (6.2.9) se retrouve également dans la plupart des autres méthodes asymptotiques. Elle diffère par son facteur \mathcal{K} remplacé par le noyau de Bragg \mathcal{B} dans le cas de la méthode approchée des petites pentes (SSA) développée par *Voronovich* [1994a].

Il vient facilement par interversion des moyennes d'ensemble et des intégrales spatiales de l'équation (6.2.9) :

$$\langle \mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \mathbb{S}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \rangle = \frac{|\mathcal{K}|^2}{Q_z^2} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_A \int_A d\mathbf{r} d\mathbf{r}' e^{i\mathbf{Q}_H \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \langle e^{iQ_z(h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r}'))} \rangle. \quad (6.2.10)$$

Afin d'aller plus loin dans le calcul de (6.2.10) il est nécessaire de faire des hypothèses sur la surface. Dans la suite nous développons le cas d'une surface Gaussienne et d'une surface nonlinéaire obtenue à partir du CWM.

6.2.1 Cas d'une surface Gaussienne

Si $h(\mathbf{r})$ est un processus Gaussien centré alors $(h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r}'))$ l'est aussi et les propriétés sur les processus Gaussiens (*Papoulis* [1965]) permettent d'écrire :

$$\langle e^{iQ_z(h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r}'))} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}Q_z^2 S_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right) \quad (6.2.11)$$

où la fonction de structure S_0 s'écrit :

$$S_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle |h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r}')|^2 \rangle = 2[\sigma_0^2 - C(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]. \quad (6.2.12)$$

La fonction entre crochets dans l'équation (6.2.10) ne dépend que de la différence $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ et se réduit à :

$$\langle \mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \mathbb{S}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \rangle = \frac{|\mathcal{K}|^2}{Q_z^2} \frac{A}{(2\pi)^2} \int_A d\mathbf{r} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-Q_z^2 S_0(\mathbf{r})/2} \quad (6.2.13)$$

et la NRCS à :

$$\Sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{\pi} \frac{|\mathcal{K}|^2}{Q_z^2} \Psi(\mathbf{Q}_H; Q_z) \quad (6.2.14)$$

où

$$\Psi(\mathbf{u}; v) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} \left[e^{-v^2 S_0(\mathbf{r})/2} - e^{-v^2 \sigma_0^2} \right]. \quad (6.2.15)$$

6.2.2 Cas d'une surface non - Gaussienne

Plusieurs développements de l'intégrale de Kirchhoff ont déjà permis de prendre en compte la non-Gaussianité des élévations (*Mouche et al.* [2007b]; *Bourlier* [2004]), mais ils supposent généralement une forme particulière de la fonction caractéristique. Comme nous le verrons, même si nous n'avons pas pu expliciter directement la forme analytique

de la fonction caractéristique dans le cadre du CWM nous pouvons tout de même l'utiliser sous l'intégrale de Kirchhoff.

Si maintenant la surface \tilde{h} est décrite par le modèle nonlinéaire CWM il est possible de se ramener à un processus Gaussien par un changement de variable. Nous pouvons écrire :

$$\langle \mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \mathbb{S}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \rangle = \frac{|\mathcal{K}|^2}{(2\pi)^4 Q_z^2} \int_A \int_A \mathbf{dr} \mathbf{dr}' e^{i\mathbf{Q}_H \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \langle e^{iQ_z(\tilde{h}(\mathbf{r}) - \tilde{h}(\mathbf{r}'))} \rangle \quad (6.2.16)$$

où $\tilde{h}(\mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r})) = h(\mathbf{r})$. En appliquant le changement de variable $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r})$ et en prenant la limite lorsque $A \rightarrow \infty$ il vient :

$$\frac{\langle \mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \mathbb{S}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \rangle}{A} = \frac{|\mathcal{K}|^2}{(2\pi)^4 Q_z^2} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \mathbf{dr} \mathbf{dr}' e^{i\mathbf{Q}_H \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \langle |J(\mathbf{r})| |J(\mathbf{r}')| e^{i\mathbf{Q}_H \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{r}) - \mathbf{D}(\mathbf{r}'))} e^{iQ_z(h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{r}'))} \rangle \quad (6.2.17)$$

où $|J|$ est à nouveau le Jacobien de la transformation :

$$J(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 + \partial_x D_x(\mathbf{r}) & \partial_x D_y(\mathbf{r}) \\ \partial_y D_x(\mathbf{r}) & 1 + \partial_y D_y(\mathbf{r}) \end{bmatrix}$$

En négligeant les termes quadratiques en pente dans le Jacobien, on peut réécrire :

$$|J(\mathbf{r})| |J(\mathbf{r}')| \approx (1 + \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})) (1 + \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}')). \quad (6.2.18)$$

En s'inspirant des calculs déjà réalisés aux équations (3.1.1) à (3.1.7), l'expression de la NRCS peut se mettre sous la forme :

$$\tilde{\Sigma}_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{\pi} \frac{|\mathcal{K}|^2}{Q_z^2} \tilde{\Psi}(\mathbf{Q}_H; Q_z) \quad (6.2.19)$$

où

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{u}; v) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{dr} e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} \left[e^{-\frac{1}{2}(v^2 S_0 + |\mathbf{u}|^2 \Phi_u)} \left((1 - i\mathbf{u} \cdot \nabla C)^2 - \Delta C + \frac{v^2}{4} S_1^2 \right) - (1 + v^2 \sigma_1^4) e^{-v^2 \sigma_0^2} e^{-|\mathbf{u}|^2 \sigma_u^2} \right]. \quad (6.2.20)$$

Les fonctions présentes dans cette équations sont celles de l'équation (3.1.6).

6.3 Implémentation numérique et résultats

Le calcul des intégrales (6.2.15) et (6.2.20) requiert une attention particulière car l'intégrande est composée de fonctions oscillantes à décroissance lente. Pour ce faire nous poussons les calculs analytiques le plus loin possible.

6.3.1 Calcul de la fonction de corrélation et de ses dérivées

Dans toute cette partie, la direction du vent est considérée comme la direction d'origine pour tout les autres angles ($\phi_{\text{vent}} = 0$). La dépendance angulaire en deux harmoniques du spectre de vent d'Elfouhaily permet d'écrire :

$$\Gamma(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-1} k^{-4} B(k) (1 + \Delta(k) \cos(2\phi_{\mathbf{k}})) = \Gamma_0(k) + \Gamma_2(k) \cos(2\phi_{\mathbf{k}}) \quad (6.3.21)$$

6.3.1.1 Fonction de corrélation des hauteurs

La fonction de corrélation possède aussi deux harmoniques et s'écrit :

$$C(\mathbf{r}) = C_0(r) + C_2(r) \cos(2\phi_{\mathbf{r}}) \quad (6.3.22)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} C_0(r) = \int_0^\infty B(k) k^{-3} J_0(kr) dk, \\ C_2(r) = - \int_0^\infty B(k) \Delta(k) k^{-3} J_2(kr) dk \end{cases} \quad (6.3.23)$$

où les J_n sont les fonctions de Bessel de première espèce et ont été obtenues à partir de l'intégration angulaire du spectre.

6.3.1.2 Dérivées de la fonction de corrélation

Les autres fonctions ($\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C, \Delta C, S_1, \Phi_{\mathbf{Q}_H}$) dans les intégrales (6.2.15) et (6.2.20) sont légèrement plus compliquées mais peuvent bénéficier de la même décomposition en coordonnées polaires qui facilite le calcul de la NRCS. Je détaille ici le calcul de l'une d'entre elle, la même technique pouvant être appliquée à toutes les autres (voir annexe C.1).

En définissant respectivement $\phi_{\mathbf{Q}_H}, \phi_{\mathbf{k}}$ et $\phi_{\mathbf{r}}$ comme les angles de \mathbf{Q}_H, \mathbf{k} et \mathbf{r} par rapport au vent, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_H \cdot \nabla C(\mathbf{r}) &= i \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{k} (\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{k}) \Gamma(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= i Q_H \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \cos(\phi_{\mathbf{Q}_H} - \phi_{\mathbf{k}}) [\Gamma_0(k) + \Gamma_2(k) \cos(2\phi_{\mathbf{k}})] e^{ikr \cos(\phi_{\mathbf{k}} - \phi_{\mathbf{r}})} k^2 dk d\phi_{\mathbf{k}} \\ &= (\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C)_0(\mathbf{r}) + (\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C)_2(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

avec des notations explicites. Le premier terme isotrope devient alors :

$$(\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C)_0(\mathbf{r}) = -Q_H \cos(\phi_{\mathbf{Q}_H} - \phi_{\mathbf{r}}) \mathcal{B}[k\Gamma_0; 1](r) \quad (6.3.25)$$

où $\mathcal{B}[f; n]$ est une transformée de type Bessel de la fonction radiale $f(k)$:

$$\mathcal{B}[f; n](r) = 2\pi \int_0^\infty f(k) J_n(kr) k dk. \quad (6.3.26)$$

Après quelques manipulations et en utilisant les transformations trigonométriques, le second terme s'écrit :

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C)_2 &= -\frac{Q_H}{2} [(\mathcal{B}[k\Gamma_2; 1](r) - \mathcal{B}[k\Gamma_2; 3](r)) \cos(\phi_{\mathbf{r}} - \phi_{\mathbf{Q}_H}) \cos(2\phi_{\mathbf{r}}) \\ &\quad + ((\mathcal{B}[k\Gamma_2; 1](r) + \mathcal{B}[k\Gamma_2; 3](r)) \sin(\phi_{\mathbf{r}} - \phi_{\mathbf{Q}_H}) \sin(2\phi_{\mathbf{r}})]. \end{aligned} \quad (6.3.27)$$

Et de la même manière (voir annexe C.1) :

$$\begin{cases} C(\mathbf{r}) &= \mathcal{B}[\Gamma_0; 0] - \mathcal{B}[\Gamma_2; 2] \cos(2\phi_{\mathbf{r}}), \\ \Delta C(\mathbf{r}) &= -\mathcal{B}[k^2\Gamma_0; 0] + \mathcal{B}[k^2\Gamma_2; 2] \cos(2\phi_{\mathbf{r}}), \\ \Phi_{\mathbf{Q}_H}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2}(\mathcal{B}[\Gamma_0; 0] - \mathcal{B}[\Gamma_0; 2]) \cos^2(\phi_{\mathbf{Q}_H} - \phi_{\mathbf{r}}) + \frac{1}{2}(\mathcal{B}[\Gamma_0; 0] + \mathcal{B}[\Gamma_0; 2]) \sin^2(\phi_{\mathbf{Q}_H} - \phi_{\mathbf{r}}) \\ &\quad - \frac{1}{2}\mathcal{B}[\Gamma_2; 2] \cos(2\phi_{\mathbf{r}}) + \frac{1}{4}(\mathcal{B}[\Gamma_2; 0] + \mathcal{B}[\Gamma_2; 4]) \cos(2\phi_{\mathbf{r}} - 2\phi_{\mathbf{Q}_H}) \cos(2\phi_{\mathbf{r}}) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\mathcal{B}[\Gamma_2; 0] - \mathcal{B}[\Gamma_2; 4]) \sin(2\phi_{\mathbf{r}} - 2\phi_{\mathbf{Q}_H}) \sin(2\phi_{\mathbf{r}}), \\ C_1(\mathbf{r}) &= \mathcal{B}[k\Gamma_0; 0] - \mathcal{B}[k\Gamma_2; 2] \cos(2\phi_{\mathbf{r}}). \end{cases}$$

Ces fonctions contenues dans les intégrandes de (6.2.15) et (6.2.20) sont d'autant plus amorties par l'exponentielle qui les multiplie que la fréquence électromagnétique est élevée (Q_H et Q_z grands). C'est donc la forme de ces fonctions autour de l'origine ($r \approx 0$) qui est la plus importante. C'est pour cela que toutes les fonctions de corrélations calculées dans le code sont évaluées sur une grille logarithmique, serrée autour de l'origine.

6.3.2 Calcul de l'intégrale de Kirchhoff

6.3.2.1 Cas Gaussien

Dans le cas Gaussien, le calcul analytique de l'intégrale de Kirchhoff peut être mené plus loin. L'intégrale de Kirchhoff sous sa forme générale s'écrit :

$$\Psi(\mathbf{Q}_H; Q_z) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} \left[e^{-Q_z^2 S_0(\mathbf{r})/2} - e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \right] d\mathbf{r} \quad (6.3.28)$$

$$= e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} \left[e^{Q_z^2 C(\mathbf{r})} - 1 \right] d\mathbf{r}. \quad (6.3.29)$$

En insérant (6.3.22) dans (6.3.29), *Thompson et al.* [2005] montrent qu'il est possible d'obtenir la NRCS sous la forme d'une série harmonique :

$$\Psi(\mathbf{Q}_H; Q_z) = a_0 + a_2 \cos(2\phi_{\mathbf{Q}_H}) + a_4 \cos(4\phi_{\mathbf{Q}_H}) + \dots \quad (6.3.30)$$

$$\text{avec } \begin{cases} a_0 = 2\pi e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \int_0^{+\infty} \left[e^{Q_z^2 C_0(r)} - 1 \right] I_0(Q_z^2 C_2(r)) J_0(Q_H r) r dr, \\ a_2 = -4\pi e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \int_0^{+\infty} e^{Q_z^2 C_0(r)} I_1(Q_z^2 C_2(r)) J_2(Q_H r) r dr, \\ a_4 = 4\pi e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \int_0^{+\infty} e^{Q_z^2 C_0(r)} I_2(Q_z^2 C_2(r)) J_4(Q_H r) r dr. \end{cases} \quad (6.3.31)$$

où les J_n sont les fonctions de Bessel de première espèce et I_n les fonctions de Bessel modifiées. Si la fonction de corrélation est faiblement anisotrope ($Q_z^2 C_2(r) \ll 1$), il est possible de faire un développement des fonctions de Bessel modifiées autour de l'origine. En ne conservant que les deux premiers harmoniques, nous pouvons écrire :

$$\Psi(\mathbf{Q}_H, Q_z) = \Psi_0 + \Psi_2 \cos(2\phi_{\mathbf{Q}_H}) \quad (6.3.32)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Psi_0 = 2\pi e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \int_0^{+\infty} \left[e^{Q_z^2 C_0(r)} - 1 \right] J_0(Q_H r) r dr \\ \Psi_2 = -2\pi Q_z^2 e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \int_0^{+\infty} \left[e^{Q_z^2 C_0(r)} C_2(r) \right] J_2(Q_H r) r dr. \end{cases} \quad (6.3.33)$$

Calcul de Ψ_0 . J_0 et le reste de l'intégrande étant des fonctions oscillantes à faibles décroissances, il est difficile de calculer l'intégrale directement. On note alors que :

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{k}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} C(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (C_0(r) + C_2(r) \cos(2\phi_{\mathbf{r}})) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} r dr d\phi_{\mathbf{r}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty C_0(r) J_0(kr) r dr}_{B(k)/(2\pi k^4)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty C_2(r) J_2(kr) \cos(2\phi_{\mathbf{r}}) r dr}_{B(k)\Delta(k)/(2\pi k^4) \cos(2\phi_{\mathbf{k}})}. \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

Numériquement nous procédons donc ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_0}{2\pi} &= e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \left[\int \left[e^{Q_z^2 C_0(r)} - Q_z^2 C_0(r) - 1 \right] J_0(Q_H r) r dr + Q_z^2 \int C_0(r) J_0(Q_H r) r dr \right] \\ &= e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} Q_z^2 2\pi \Gamma_0(Q_H) + e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \int \left[e^{Q_z^2 C_0(r)} - Q_z^2 C_0(r) - 1 \right] J_0(Q_H r) r dr \\ &= e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} Q_z^2 \frac{B(Q_H)}{Q_H^4} + e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \int \left[e^{Q_z^2 C_0(r)} - Q_z^2 C_0(r) - 1 \right] J_0(Q_H r) r dr. \end{aligned} \quad (6.3.35)$$

On soustrait la majeure partie oscillante de l'intégrande : $e^{Q_z^2 C_0(r)}$, puis on rajoute la partie extraite dont on a pu calculer analytiquement la valeur.

Calcul de Ψ_2 . On procède de la même manière pour la partie anisotrope :

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_2}{2\pi} &= -Q_z^2 e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \left[\int \left[(e^{Q_z^2 C_0(r)} - 1) C_2(r) \right] J_2(Q_H r) r dr + \int [C_2(r)] J_2(Q_H r) r dr \right] \\ &= Q_z^2 e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \frac{B(Q_H) \Delta(Q_H)}{Q_H^4} - Q_z^2 e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \int \left[(e^{Q_z^2 C_0(r)} - 1) C_2(r) \right] J_2(Q_H r) r dr. \end{aligned} \quad (6.3.36)$$

Les deux intégrales restantes dans (6.3.35) et (6.3.36) sont réalisées à nombre de points variables. En effet, plus Q_H est grand, plus le nombre d'oscillations de la fonction de Bessel augmente pour un intervalle d'intégration sur r donné. Nous faisons donc un changement de variable $u = Q_H r$ afin que le nombre de points par oscillation de la fonction de Bessel reste constant (en général 20 points par oscillation). Nous réalisons ensuite l'intégration par la règle de Simpson. Afin de ne pas avoir à recalculer les fonctions de corrélations à chaque point appelées par la méthode d'intégration, celles-ci ont été précalculées et leurs valeurs aux points appelés sont calculées rapidement par interpolation quadratique.

6.3.2.2 Cas non-Gaussien

Dans le cas non Gaussien, la fonction de corrélation ainsi que ses dérivées sont également décomposées sur des coordonnées polaires afin de faciliter le calcul de la NRCS. Toutefois, l'hypothèse de faible anisotropie n'est pas appliquée ici et l'intégrale double en r et ϕ_r de l'équation (6.2.20) est réalisée directement. Toutefois, la décroissance de l'exponentielle présente dans l'intégrande est plus rapide que dans le cas linéaire (présence du Q_H) et permet de rapidement limiter l'horizon d'intégration en r . L'intégration angulaire est rapide car définie sur un horizon angulaire limité : $[0, 2\pi]$. Les mêmes techniques d'intégration que le cas linéaire sont également utilisées (grille logarithmique pour les fonctions de corrélations, soustraction et rajout de la majeure partie oscillante de l'intégrande, règle d'intégration de Simpson et interpolation quadratique des fonctions de corrélations).

6.3.2.3 Résultats et interprétations

Afin de quantifier l'effet des nonlinéarités sur la plupart des configurations d'éclairage connues, nous reportons ici les différents résultats obtenus pour des configurations monostatique, bistatique et azimutale. Nous faisons varier la bande électromagnétique, les angles d'incidence et les angles d'émission et réception. Dans les figures suivantes θ_0 et ϕ_0 sont respectivement l'angle d'incidence et l'azimut de l'émetteur par rapport au vent. θ et ϕ ceux du récepteur. La transformation nonlinéaire étant purement géométrique, je montre indifféremment les résultats obtenus dans le cadre de l'approximation de Kirchhoff ou des petites pentes (SSA) car les conclusions obtenues dans les deux cas sont similaires. Lorsque l'approche SSA est utilisée, le résultat est donné dans les deux polarisations si celles-ci sont sensiblement différentes. Dans toutes les simulations, la permittivité relative ϵ_r de la mer est gardée constante et égale à $60 + i 60$. Nous avons vu au chapitre 3 que la transformation nonlinéaire modifie le spectre de la surface. Afin de réaliser des comparaisons pertinentes entre les diagrammes de diffusion issus des modèle linéaire et du "Choppy Wave Model", il est nécessaire que les surfaces aient le même spectre. Pour cela, nous déshabillons préalablement le spectre qui sera utilisé dans le calcul de l'intégrale de Kirchhoff du cas nonlinéaire (équation (6.2.20)).

Configuration monostatique

La configuration monostatique correspond au cas où l'émetteur est également le récepteur. Nous considérons dans les simulations que l'azimut de l'émetteur est toujours le

même par rapport au vent. Seul l'angle d'incidence θ_0 par rapport à la verticale varie. La majeure partie de mesures de télédétection est réalisée selon cette configuration. C'est le cas de l'observation satellitaire. Nous pouvons voir sur les figures 6.2(a) à 6.2(c) que les principales modifications apportées aux diagrammes de diffusion se trouvent au nadir et aux grands angles d'incidence. Au nadir la NRCS issue du modèle nonlinéaire est légèrement supérieure à celle du modèle linéaire et présente un lobe plus étroit. C'est un effet que l'on peut expliquer par l'aplatissement des creux des vagues qui tendent à renvoyer principalement dans le spéculaire. Une étude plus approfondie sur la modification de la forme du lobe et de ses conséquences sur l'estimation des paramètres géophysiques est détaillée dans la section 6.4. Aux grands angles la NRCS est fortement relevée par rapport au diagramme linéaire, principalement en polarisation HH. La modulation des petites vagues par les grandes tend à affiner les crêtes et augmenter les pentes locales, ce qui explique pourquoi la surface de la mer nonlinéaire diffracte plus aux grands angles.

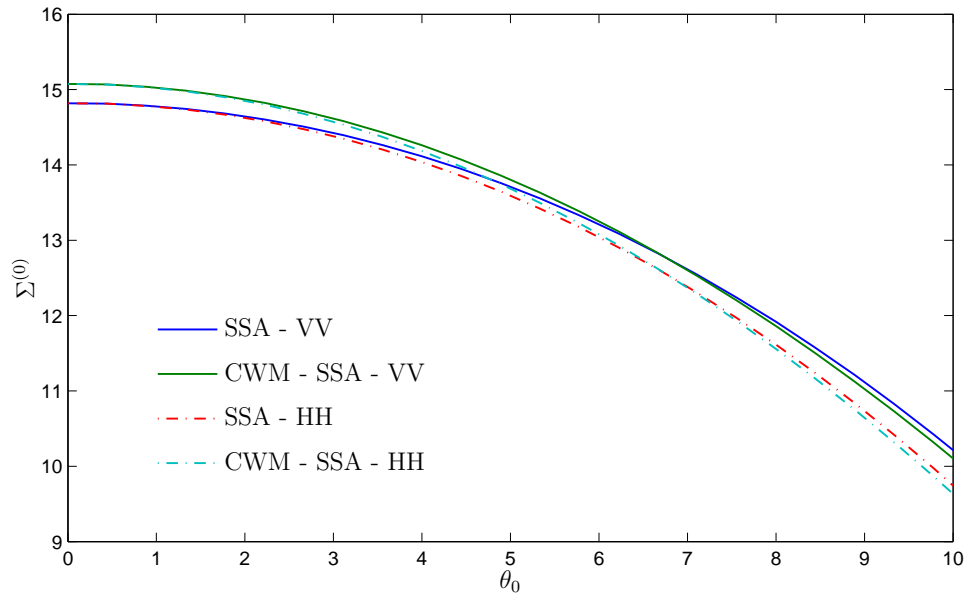
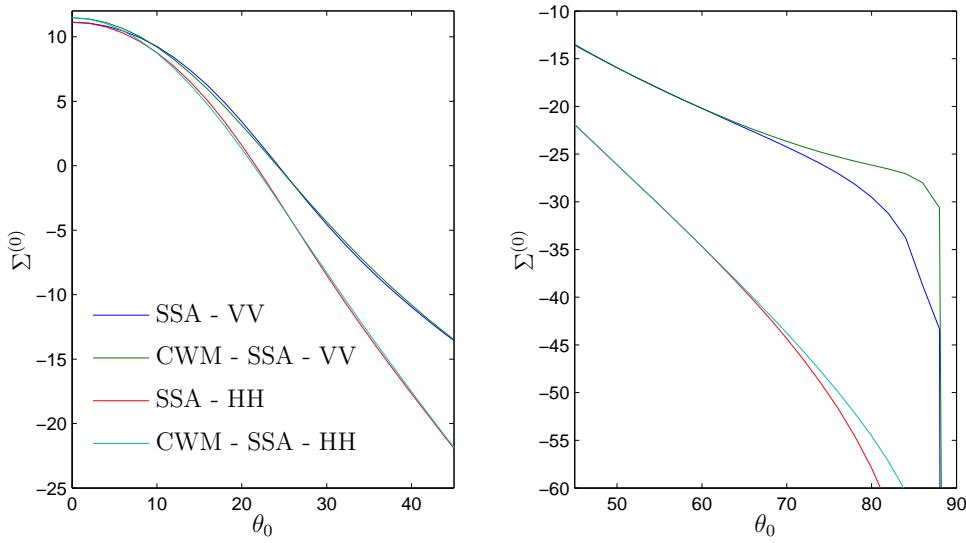
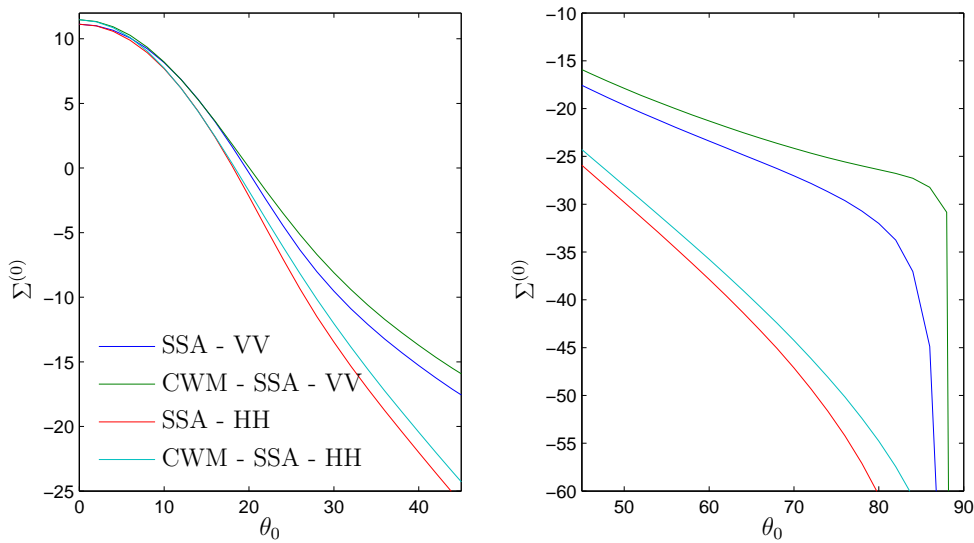
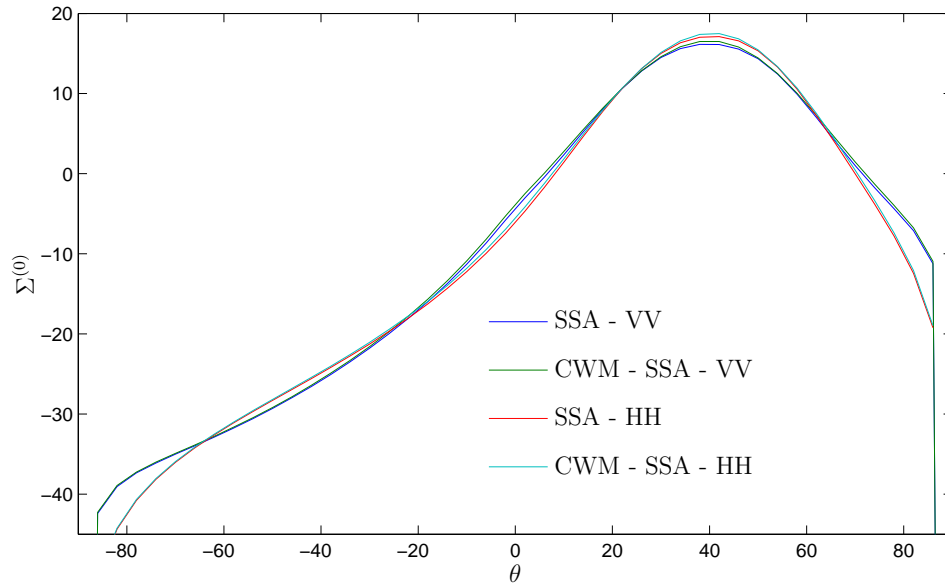
(a) $U_{10} = 5 \text{ m.s}^{-1}$, Bande C, $\phi_0 = 0^\circ$ (b) $U_{10} = 11 \text{ m.s}^{-1}$, Bande Ka, $\phi_0 = 0^\circ$ (c) $U_{10} = 11 \text{ m.s}^{-1}$, Bande Ka, $\phi_0 = 90^\circ$

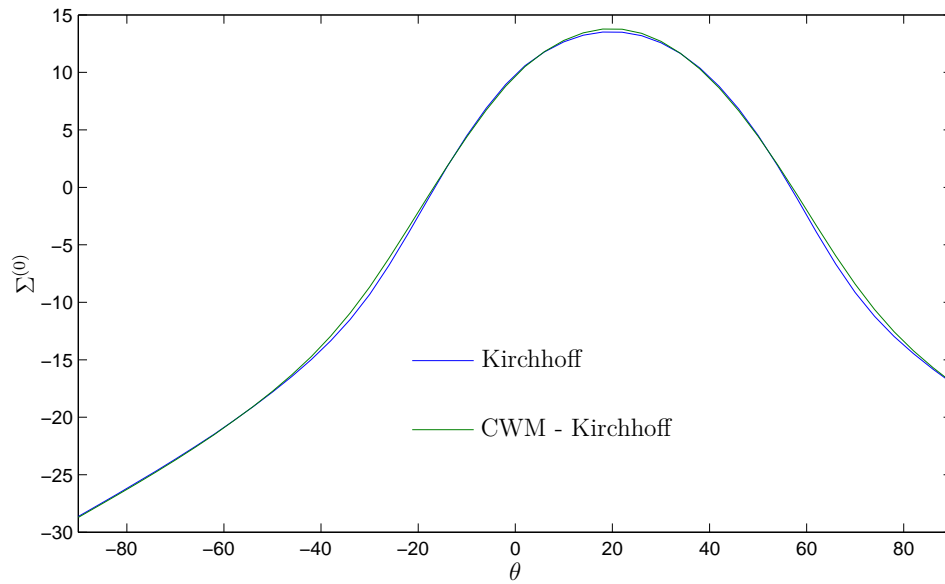
Figure 6.2 – Diagrammes monostatiques à différentes bandes, angles d'incidence et vents.

Configuration bistatique

Dans cette configuration les angles d'incidence et azimuth de l'émetteur et du récepteur sont tous indépendants.



(a) $U_{10} = 5 \text{ m.s}^{-1}$, Bande L, $\theta_0 = 40^\circ$, $\phi = \phi_0 = 0^\circ$



(b) $U_{10} = 7 \text{ m.s}^{-1}$, Bande Ku, $\theta_0 = 20^\circ$, $\phi = \phi_0 = 0^\circ$

Figure 6.3 – Diagrammes bistatiques à différentes bandes, angles d'incidence et vents.

Configuration azimutale

Par configuration azimutale, nous entendons une configuration monostatique à azimuth variable et incidence fixée. Ce sont souvent le genre de mesures obtenues lors des campagnes par avion.

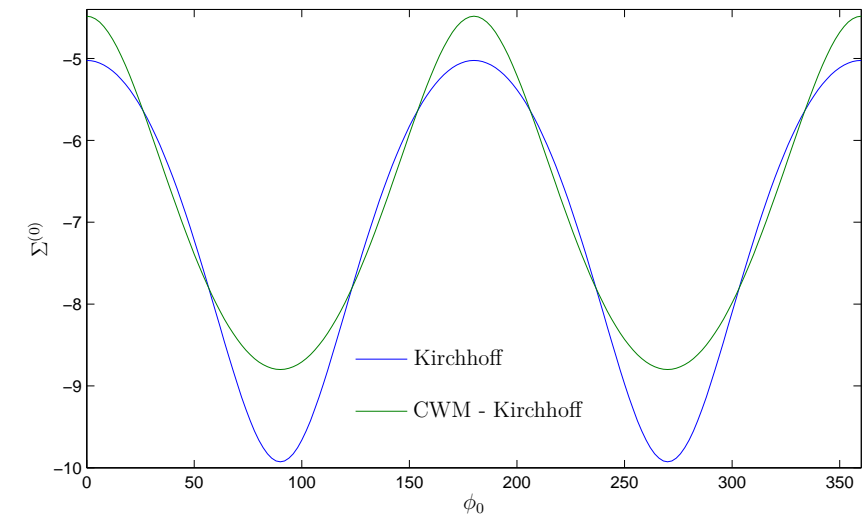
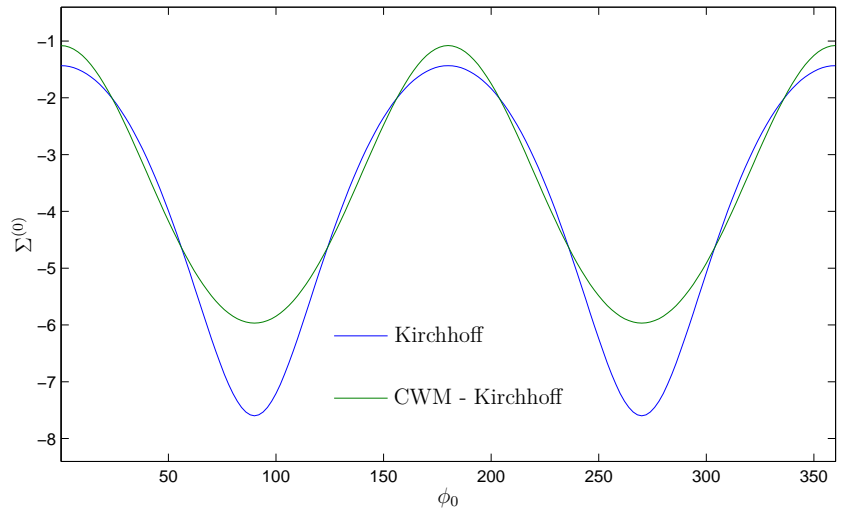
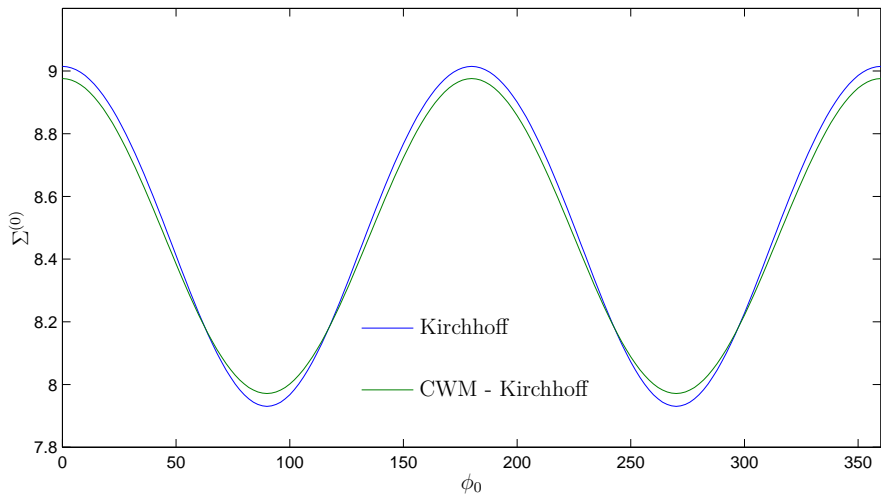
(a) $U_{10} = 5 \text{ m.s}^{-1}$, Bande L, $\theta_0 = 20^\circ$ (b) $U_{10} = 7 \text{ m.s}^{-1}$, Bande Ku, $\theta_0 = 20^\circ$ (c) $U_{10} = 11 \text{ m.s}^{-1}$, Bande Ka, $\theta_0 = 10^\circ$

Figure 6.4 – Diagrammes azimuthaux à différentes bandes, angles d'incidence et vents.

Les figures 6.4(a) et 6.4(b) témoignent de l'augmentation de la NRCS dans la direction longitudinale mais aussi transverse au vent. Même si l'amplitude des variations est plus faible dans le cas de la surface nonlinéaire, les variations de la NRCS près de la direction longitudinale sont plus abruptes et témoignent d'une augmentation de la directivité des vagues nonlinéaires dans la direction "upwind". En bande Ka, les vagues de capillarité (inférieures au centimètre) contribuent fortement à la diffraction électromagnétique mais ne sont pas prises en compte dans le modèle CWM. Il est donc difficile de tirer des conclusions du diagramme de la figure 6.4(c). Je n'ai volontairement pas mis de simulations obtenues pour de plus grands angles d'incidence car les mesures azimutales par avion ne sont généralement pas faites pour ces angles.

6.4 Optique Physique et Optique Géométrique

6.4.1 Approximation haute fréquence d'Optique Physique

Dans le cas haute-fréquence et pour des angles proches du Nadir, la contribution principale de l'intégrande dans (6.2.15) est pour des rayons r proches de zéro. Nous pouvons alors remplacer les fonctions par leur développement de Taylor autour de l'origine.

Rappelons que :

$$C(\mathbf{r}) = C_0(r) + C_2(r) \cos(2\phi_{\mathbf{r}}) \quad (6.4.37)$$

avec

$$C_0(r) = \int_0^\infty B(k)k^{-3}J_0(kr)dk \quad \text{et} \quad C_2(r) = - \int_0^\infty B(k)\Delta(k)k^{-3}J_2(kr)dk. \quad (6.4.38)$$

Les séries de Taylor de J_0 et $J_2(x)$ en $x = 0$ s'écrivent :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \mathcal{O}(x^6) \quad \text{et} \quad J_2(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{96} + \mathcal{O}(x^6) \quad (6.4.39)$$

permettant d'écrire :

$$C_0(r) \approx \sigma_0^2 - \frac{\sigma_{2i}^2 r^2}{4} + \frac{\sigma_{4i}^2 r^4}{64} \quad \text{et} \quad C_2(r) \approx -\frac{\sigma_{2a}^2 r^2}{8} + \frac{\sigma_{4a}^2 r^4}{96} \quad (6.4.40)$$

où les σ_{ni}^2 et σ_{na}^2 sont respectivement les moments absolus isotropiques et anisotropiques d'ordre n du spectre :

$$\sigma_{ni}^2 = \int |\mathbf{k}|^n \frac{B(k)}{2\pi k^4} d\mathbf{k}, \quad \sigma_{na}^2 = \int |\mathbf{k}|^n \frac{B(k)\Delta(k)}{2\pi k^4} d\mathbf{k}. \quad (6.4.41)$$

Ainsi

$$C(\mathbf{r}) \approx \sigma_0^2 - r^2 \left(\sigma_{2i}^2/4 + (\sigma_{2a}^2/8) \cos(2\phi_{\mathbf{r}}) \right) + \frac{r^4}{24} \left(3\sigma_{4i}^2/8 + (\sigma_{4a}^2/4) \cos(2\phi_{\mathbf{r}}) \right). \quad (6.4.42)$$

Si r est le module et $\phi_{\mathbf{r}}$ l'angle de \mathbf{r} par rapport à un système d'axe alors, pour A et B deux constantes :

$$r^2(A + B \cos(2\phi_{\mathbf{r}})) = x^2(A + B) + y^2(A - B) \quad (6.4.43)$$

où x et y sont les projections de \mathbf{r} sur les axes de référence. La fonction de corrélation peut donc se réécrire :

$$C(\mathbf{r}) \approx \sigma_0^2 - \frac{x^2}{2} \sigma_{2x}^2 - \frac{y^2}{2} \sigma_{2y}^2 + (x^2 + y^2) \left(\frac{x^2}{24} \sigma_{4x}^2 + \frac{y^2}{24} \sigma_{4y}^2 \right) \quad (6.4.44)$$

où x et y sont respectivement les projections de \mathbf{r} dans la direction upwind et crosswind et

$$\sigma_{2x}^2 = \frac{\sigma_{2i}^2 + \sigma_{2a}^2/2}{2}, \quad \sigma_{2y}^2 = \frac{\sigma_{2i}^2 - \sigma_{2a}^2/2}{2}, \quad (6.4.45)$$

$$\sigma_{4x}^2 = \frac{(3/4)\sigma_{4i}^2 + \sigma_{4a}^2/2}{2}, \quad \sigma_{4y}^2 = \frac{(3/4)\sigma_{4i}^2 - \sigma_{4a}^2/2}{2}. \quad (6.4.46)$$

Les pentes quadratiques moyennes (mss pour ‘mean square slope’)) et courbures quadratiques moyennes (msc pour ‘mean square curvature’)) totales s’écrivent donc :

$$\sigma_2^2 = \sigma_{2i}^2 = \sigma_{2x}^2 + \sigma_{2y}^2 \quad (6.4.47)$$

$$\sigma_4^2 = \sigma_{4i}^2 = \frac{4}{3}(\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2) \quad (6.4.48)$$

(la partie anisotrope du spectre étant en $\cos 2\phi_{\mathbf{k}}$) les moments absolus du spectre sont indifférents à la partie anisotrope).

En supposons la correction de courbure (en r^4) faible, le développement haute-fréquence de l’intégrale de Kirchhoff s’écrit alors :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{Q}) = & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{Hx}x} e^{iQ_{Hy}y} e^{-Q_z^2 x^2 \sigma_{2x}^2/2} e^{-Q_z^2 y^2 \sigma_{2y}^2/2} \times \\ & \left[1 + \frac{Q_z^2 x^4}{24} \sigma_{4x}^2 + \frac{Q_z^2 y^4}{24} \sigma_{4y}^2 + \frac{Q_z^2 x^2 y^2}{24} (\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2) \right] dx dy \end{aligned} \quad (6.4.49)$$

où Q_{Hx} et Q_{Hy} sont respectivement les projections du vecteur \mathbf{Q}_H dans les directions upwind et crosswind. Les deux intégrations successives (détails en annexe C.2) mènent à :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{Q}) = & \frac{2\pi}{\sqrt{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2 Q_z^4}} \exp \left(-\frac{Q_{Hx}^2}{2\sigma_{2x}^2 Q_z^2} - \frac{Q_{Hy}^2}{2\sigma_{2y}^2 Q_z^2} \right) \times \\ & \left\{ 1 + \frac{1}{24Q_z^2} \left[\frac{\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2}{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2} H_2 \left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z \sigma_{2x}} \right) H_2 \left(\frac{Q_{Hy}}{Q_z \sigma_{2y}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sigma_{4x}^2}{\sigma_{2x}^4} H_4 \left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z \sigma_{2x}} \right) + \frac{\sigma_{4y}^2}{\sigma_{2y}^4} H_4 \left(\frac{Q_{Hy}}{Q_z \sigma_{2y}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.4.50)$$

où les H_n sont les polynômes d’Hermite :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}. \quad (6.4.51)$$

Le développement d’Optique Physique est une formule d’optique géométrique directement sensible à la variance totale des pentes et corrigée par un effet de courbure. Il n’est normalement applicable qu’aux hautes fréquences mais de part la simplicité de son expression il a été étendu à des fréquences électromagnétiques plus faibles. Les variances des pentes et des courbures déduites des diagrammes de diffraction ne correspondent plus aux variances des pentes et courbures totales mais simplement à celles ‘vues’ par l’onde électromagnétique. On peut se référer par exemple aux articles de *Brown et al.* [1978], *Wilheit* [1979] ou *Thompson et al.* [2005] qui montrent quelle part du spectre de mer est perçue par l’onde électromagnétique. La méthode d’Optique Géométrique utilisée dans ces cas-là permet d’évaluer des pentes filtrées par l’onde électromagnétique.

6.4.2 Influence des nonlinéarités sur les diagrammes de diffusion

Dans l'approximation de Kirchhoff, les diagrammes de diffusion en configuration monostatique sont utilisés afin de retrouver la variance des pentes et des courbures totale de la mer. Ces données permettent alors de remonter à l'état de la mer ([Walsh et al. \[1998\]](#)). En pratique, la surface est supposée Gaussienne et la formule (6.4.50) est utilisée autour du nadir. En configuration monostatique (back scattering) dans la direction du vent (éclairage upwind) on peut écrire pour un angle d'incidence θ_0 (détails annexe C.2) :

$$\log \left(\frac{\cos^4(\theta_0) \Sigma^{(0)}(\theta_0)}{\Sigma^{(0)}(0)} \right) = A_{up} \tan^4(\theta_0) + B_{up} \tan^2(\theta_0) \quad (6.4.52)$$

avec

$$\begin{cases} A_{up} &= \frac{1}{\sigma_{2x}^2} \frac{1}{96K^2} \left(-\frac{\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2}{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2} + \frac{\sigma_{4x}^2}{\sigma_{2x}^6} (1 - 6\sigma_{2x}^2) \right) \\ B_{up} &= \frac{1}{\sigma_{2x}^2} \left[\frac{-1}{2} + \frac{1}{96K^2} \left(-\frac{\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2}{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2} (1 - \sigma_{2x}^2) + 3\frac{\sigma_{4x}^2}{\sigma_{2x}^2} (1 - 2\sigma_{2x}^2) + 3\frac{\sigma_{4y}^2}{\sigma_{2y}^2} \sigma_{2x}^2 \right) \right] \end{cases} \quad (6.4.53)$$

et nous pouvons noter qu'à la limite haute fréquence ($K \rightarrow \infty$) l'approximation de l'Optique Géométrique nous permet de déduire les pentes et courbures totales σ_2 et σ_4 comme

$$\lim_{K \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{B_{up}} + \frac{1}{B_{cross}} \right) = \sigma_2^2, \quad (6.4.54)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} 8K^2 \left(\frac{A_{up}}{B_{up}^4} + \frac{A_{cross}}{B_{cross}^4} \right) = \sigma_4^2. \quad (6.4.55)$$

Dans le cas bi-dimensionnel et avec un développement à l'ordre 2 de la fonction de corrélation (GO) la NRCS peut s'écrire sous la forme ([Valenzuela \[1978\]](#)) :

$$\log \left(\frac{\cos^4(\theta_0) \Sigma^{(0)}(\theta_0)}{\Sigma^{(0)}(0)} \right) = -\frac{\tan^2(\theta_0)}{2\sigma_2^2} \quad (6.4.56)$$

où σ_2^2 est la pente moyenne carrée. Cette formule fondamentale est depuis longtemps utilisée afin de remonter à la mss des pentes ([Walsh et al. \[1998\]](#)) et donc à des paramètres géophysiques comme le vent. En négligeant les termes de courbure où en passant à la limite haute-fréquence dans (6.4.53) on retrouve très facilement cette expression pour le cas tri-dimensionnel.

Pour remonter à la mss et msc, la méthode consiste à effectuer une régression quadratique en la variable $\tan^2(\theta_0)$ du diagramme de diffraction dans les directions longitudinale et transverse au vent. Afin d'étudier l'influence des nonlinéarités sur l'interprétation de ces régressions nous avons tracé les diagrammes de diffraction dans l'approximation de Kirchhoff des modèles Gaussien et CWM entre 0 et 20 degrés pour différents vents. Nous avons appliqué les régressions quadratiques dans la direction upwind et crosswind et, à l'aide des égalités de l'équation (6.4.53), en avons déduit les valeurs de $\bar{\sigma}_{2x}^2, \bar{\sigma}_{2y}^2, \bar{\sigma}_{4x}^2$ et $\bar{\sigma}_{4y}^2$. Dans l'hypothèse Gaussienne, ces quantités sont directement interprétées comme les mss et msc upwind et crosswind filtrées par l'onde électromagnétique. Les nonlinéarités de la surface sont donc directement incluses dans ces estimations et se traduisent donc par des biais. De plus, comme le montre les figures 3.5(a) à 3.5(f) les nonlinéarités n'affectent pas de la même manière les hautes et basses fréquences du spectre. Ainsi le biais des mss et msc dépend de la fréquence électromagnétique utilisée. En utilisant les équations (6.4.47)

et (6.4.48), nous pouvons définir de la même manière les mss et msc filtrées dans les cas Gaussien $(\bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_4)$ et non Gaussien $(\bar{\sigma}_{2\text{CWM}}, \bar{\sigma}_{4\text{CWM}})$ comme :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_2^2 &= \bar{\sigma}_{2x}^2 + \bar{\sigma}_{2y}^2 \\ \bar{\sigma}_4^2 &= \frac{4}{3}(\bar{\sigma}_{4x}^2 + \bar{\sigma}_{4y}^2) \end{cases} \quad (6.4.57)$$

et

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{2\text{CWM}}^2 &= \bar{\sigma}_{2x\text{CWM}}^2 + \bar{\sigma}_{2y\text{CWM}}^2 \\ \bar{\sigma}_{4\text{CWM}}^2 &= \frac{4}{3}(\bar{\sigma}_{4x\text{CWM}}^2 + \bar{\sigma}_{4y\text{CWM}}^2) \end{cases} \quad (6.4.58)$$

La figure 6.5 montre un exemple de régression quadratique d'un diagramme de diffraction dans la configuration upwind pour $U_{10} = 7 \text{ m.s}^{-1}$ dans la bande C.

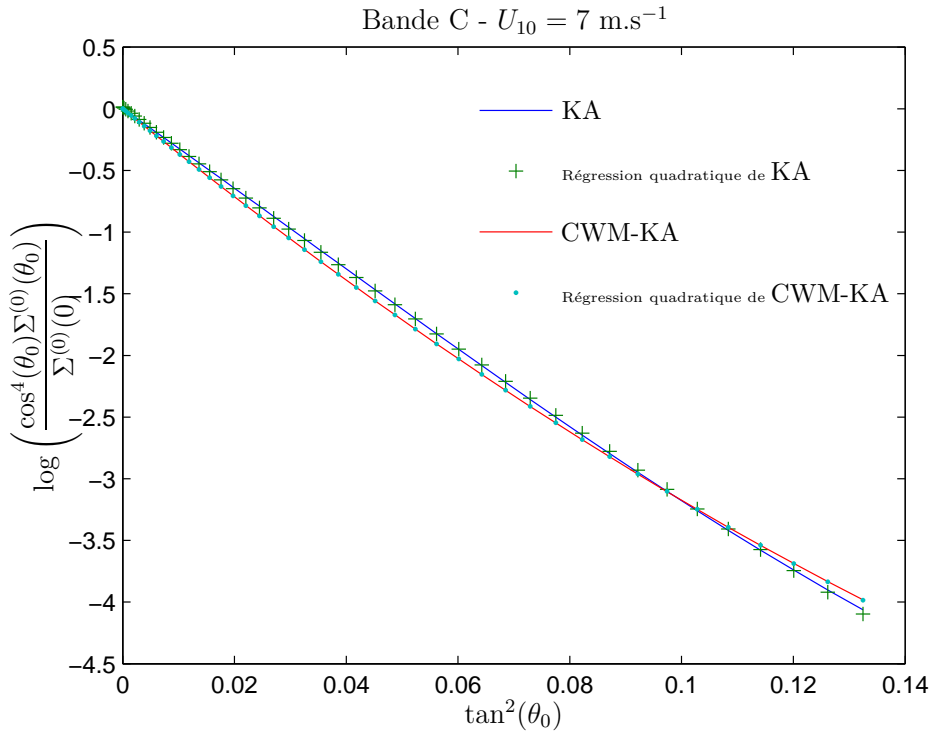


Figure 6.5 – Régression quadratique d'un diagramme de Kirchhoff.

La figure 6.6 montre l'estimation de σ_2 filtrée dans le cas Gaussien et non Gaussien et la valeur correspondante totale pour différentes bandes électromagnétiques. Les points sur la courbe sont obtenus pour différents vents (ici les six points sont ceux de $U_{10} = 5, 7, 9, 11, 13$ et 15 m.s^{-1}). Comme prévu, plus la fréquence est grande plus l'estimation de la mss se rapproche de la mss totale. Toutefois l'erreur due aux nonlinéarités est toujours présente et représentée sur la figure 6.7 en fonction de la fréquence. Les mêmes courbes sont réalisées pour la courbure sur les figures 6.8 et 6.9.

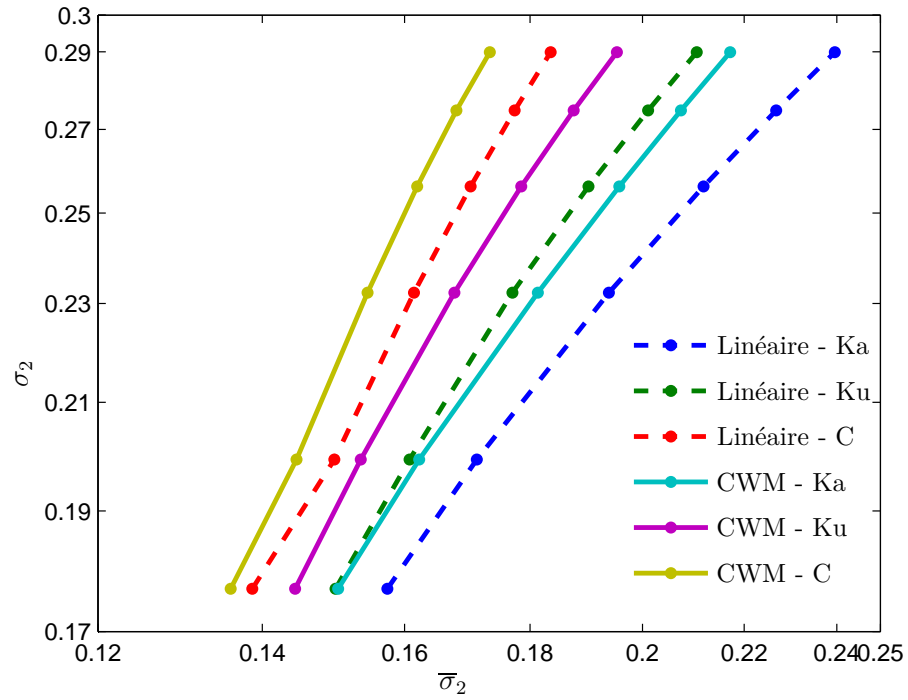


Figure 6.6 – σ_2 total fonction des valeurs filtrées $\bar{\sigma}_2$. Cas Gaussien et non Gaussien.

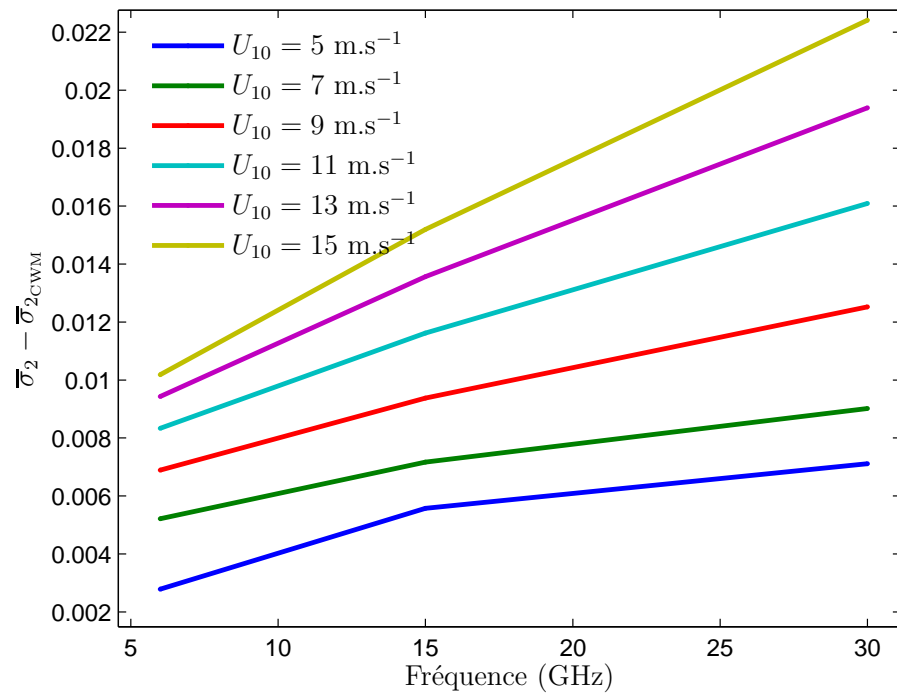


Figure 6.7 – Erreur systématique faite sur σ_2 due aux nonlinéarités.

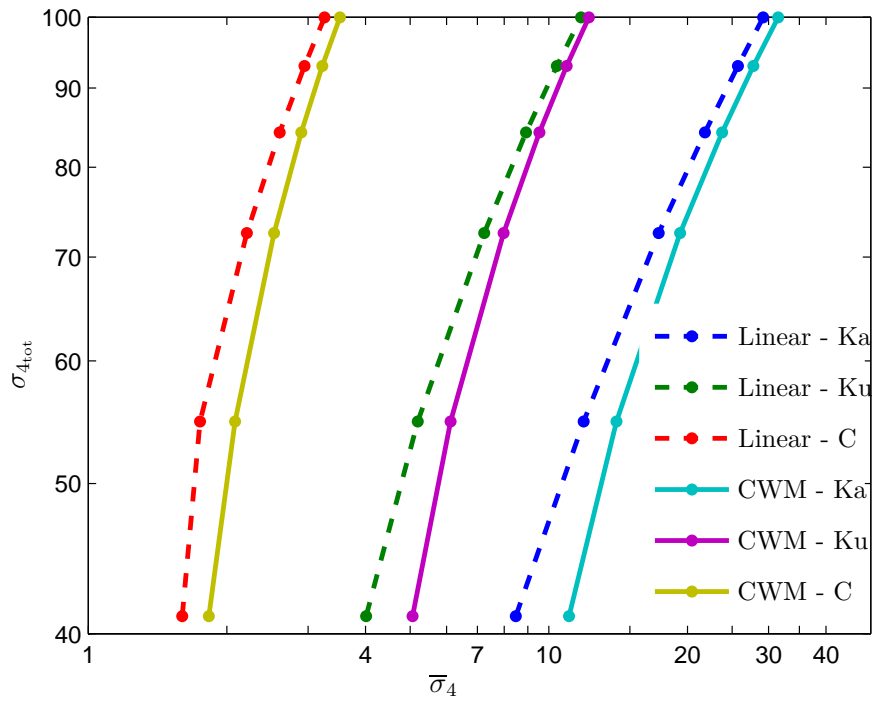


Figure 6.8 – σ_4 total fonction des valeurs filtrées $\bar{\sigma}_4$. Cas Gaussien et non Gaussien.

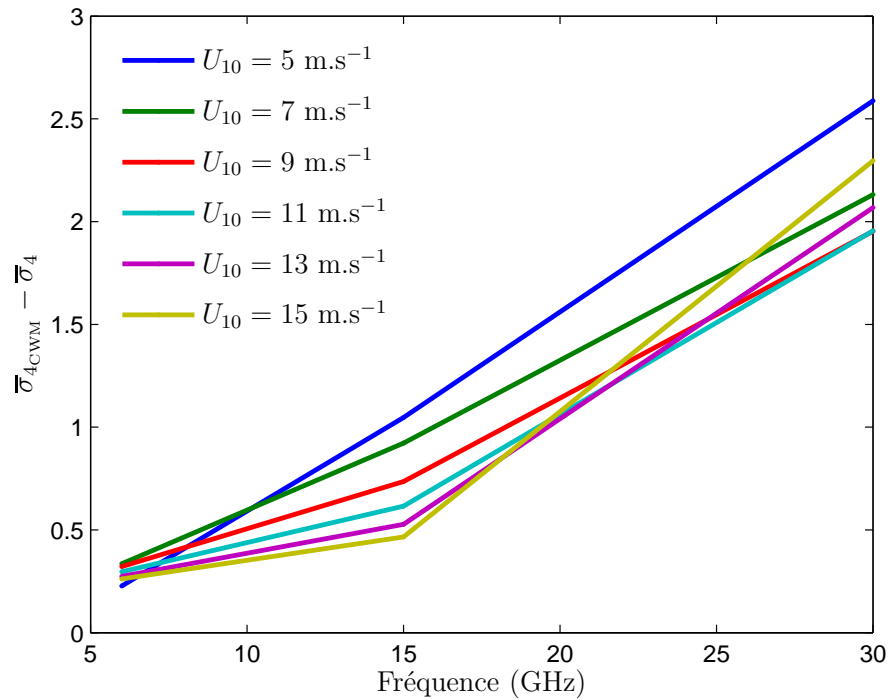


Figure 6.9 – Erreur systématique faite sur σ_4 due aux nonlinéarités.

6.5 Calcul de l'émissivité

6.5.1 Emissivité et difficultés

L'émissivité, mesurée par les radiomètres, se définit comme la luminance émise intrinsèquement par la surface à la luminance de cette même surface considérée comme rayonnant suivant la loi du corps noir. *Peake* [1959] la relie directement à l'intégrale des coefficients bistatiques (Cf. (6.5.59)) et sa mesure peut servir entre autres à estimer la salinité de surface de l'eau de mer car elle est très sensible à la constante diélectrique (*Swift and McIntosh* [1983]). Dans les modélisations, son calcul est généralement très long et demande une grande précision. La présence d'écume, de permittivité différente, sur la surface de la mer est un donc un élément très important à prendre en compte.

Le théorème de réciprocité impose que la quantité d'énergie renvoyée par la surface dans la direction \mathbf{K} , lorsqu'elle est éclairée par des ondes électromagnétiques venant de toutes les directions, est égale à ce que renvoie la surface dans toutes les directions lorsqu'elle est éclairée sous l'incidence \mathbf{K} . Ce théorème permet de calculer l'émissivité au travers de la réflectivité qui s'écrit :

$$\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{k}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \Sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}{qK} d\mathbf{k} \quad (6.5.59)$$

et l'émissivité $\mathcal{E}_{ij}(\mathbf{k}_0) = 1 - \mathcal{R}_{ij}(\mathbf{k}_0)$. Afin d'obtenir l'émissivité, le diagramme de diffraction doit être intégré pour tout les angles d'incidence et tous les angles de diffraction. L'intégrale de Kirchhoff doit donc être calculée avec une très grande précision pour toutes les configurations bistatiques. Le temps de calcul est donc très important. Toutefois lorsque la fréquence électromagnétique pour laquelle nous voulons calculer l'émissivité est assez faible, il est possible d'utiliser l'approximation des petites perturbations pour calculer l'intégrale. A l'aide d'une méthode originale basée sur des convolutions radiales rapides, je détaille dans la partie suivante comment nous avons étendu l'approximation des petites perturbations aux fréquences électromagnétiques plus élevées. La méthode permet alors de déduire instantanément la valeur de la NRCS pour toutes les autres configurations permettant un gain considérable dans les temps de calcul de l'émissivité. La méthode décrite dans la suite se limite aux surfaces Gaussiennes mais peut être étendue pour d'autres surfaces.

6.5.2 Approximation de Kirchhoff et méthode des petites perturbations

Dans le cas de surfaces Gaussiennes fortement rugueuses l'intégrale de Kirchhoff est l'outil le plus largement utilisé. Cependant, un calcul précis du champ diffracté aux grands angles implique de connaître la fonction de corrélation aux grands arguments. Celle-ci a donc besoin d'être bien calculée non seulement aux petits arguments (pour les angles proches du nadir) mais aussi aux grands pour les grands angles. Un calcul précis de la fonction de corrélation devient vite très long et dans le cas non Gaussien où le calcul des dérivées de la fonction de corrélation requièrent cette même précision, les temps de calcul deviennent vite inacceptables.

Toutefois, lorsque la variance des hauteurs reste suffisamment faible ($Q_z^2 \sigma_0^2 \ll 1$) un développement de l'exponentielle peut-être fait puisqu'alors $Q_z^2 S_0(\mathbf{r})/2$ reste toujours

inférieur à 1 :

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{Q}_H; Q_z) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} \left[e^{-Q_z^2 S_0(\mathbf{r})/2} - e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \right] d\mathbf{r} \\ &\approx \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} Q_z^2 C(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &\approx 4\pi^2 Q_z^2 \Gamma(\mathbf{Q}_H).\end{aligned}\quad (6.5.60)$$

Cette méthode bien connue dite des petites perturbations (SPM) est très largement utilisée car instantanée. Elle permet d'éviter de calculer la fonction de corrélation ainsi que l'intégrale de Kirchhoff. Et même si son domaine de validité reste restreint on l'utilise souvent pour le calcul du champ aux grands angles où Q_z est faible et permet le développement de l'exponentielle.

Lorsque la fréquence électromagnétique augmente et que les angles s'approchent du nadir, le développement de l'exponentielle au premier ordre n'est plus valable. Il devient alors nécessaire de passer par l'intégrale de Kirchhoff. Pourtant, il est possible de développer l'exponentielle à des ordres supérieurs si l'on veut étendre le domaine de validité de la méthode. On peut alors écrire :

$$\Psi(\mathbf{Q}_H; Q_z) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} \left[e^{-Q_z^2 S_0(\mathbf{r})/2} - e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \right] d\mathbf{r} \quad (6.5.61)$$

$$= e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[Q_z^2 C(\mathbf{r})]^n}{n!} d\mathbf{r} \quad (6.5.62)$$

$$= 4\pi^2 e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(Q_z)^{2n}}{n!} \left[\Gamma \overset{n}{\otimes} \right] (\mathbf{Q}_H) \quad (6.5.63)$$

où $\overset{n}{\otimes}$ est la $n^{\text{ème}}$ auto-convolution avec la même grandeur (ex : $\Gamma \overset{3}{\otimes} = \Gamma \otimes \Gamma \otimes \Gamma$). Ce développement déjà introduit par [Ulaby et al. \[1986\]](#) dans son livre n'a jamais été réellement utilisé pour des spectres non Gaussiens car les convolutions de spectres étant très longues à calculer il est préférable de passer par le calcul de l'intégrale de Kirchhoff.

Pourtant, du fait de la dépendance azimutale bien connue des spectres de mer (2 harmoniques) nous avons établi une méthode de calcul très rapide basée sur les convolutions de fonctions radiales qui permet d'importants gains de temps. Le détail de calcul des convolutions radiales est présenté dans la sous-partie qui suit.

6.5.2.1 Formule des convolutions radiales

En premier lieu nous allons détailler une méthode rapide de convolution de fonctions de dimensions purement radiales basée sur une simplification de l'intégrale de convolution obtenue grâce aux propriétés de quadrature des fonctions de Bessel. Les résultats obtenus peuvent d'ailleurs être facilement étendus aux fonctions radiales en trois dimensions.

En deux dimensions, la convolution de deux fonctions f et g s'écrit dans le cas général :

$$h(\mathbf{r}) = [f \otimes g](\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}') g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (6.5.64)$$

Dans le cas où une fonction F est radiale ($F(\mathbf{r}) = F(r)$), sa transformée de Fourier est aussi radiale et s'écrit alors comme sa transformée de Hankel :

$$\hat{F}(\mathbf{k}) = \hat{F}(k) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} F(r) d\mathbf{r} = 2\pi \int_0^{+\infty} F(r) J_0(kr) r dr \quad (6.5.65)$$

et en appliquant ce résultat à la convolution de deux fonctions radiales, il vient

$$\hat{h}(\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k})\hat{g}(\mathbf{k}) = (2\pi)^2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(r')g(r'')J_0(kr')J_0(kr'') r' r'' dr' dr'' \quad (6.5.66)$$

et sa transformée de Fourier radiale :

$$\begin{aligned} h(r) &= 2\pi \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(r')g(r'')J_0(kr')J_0(kr'')J_0(kr) r' r'' dr' dr'' k dk \\ &= \int_0^{\infty} dr' r' f(r') \int_0^{\infty} dr'' r'' g(r'') \Phi(r, r', r''), \end{aligned} \quad (6.5.67)$$

où Φ est donné par :

$$\Phi(r, r', r'') = 2\pi \int_0^{\infty} dk k J_0(kr)J_0(kr')J_0(kr''). \quad (6.5.68)$$

Ce noyau peut alors être évalué par la formule générale donné par [Watson \[1995\]](#) :

$$\int_0^{\infty} dk k^{1-\nu} J_{\nu}(kr)J_{\nu}(kr')J_{\nu}(kr'') = \frac{2^{\nu-1} \Delta^{2\nu-1}}{(rr'r'')^{\nu} \Gamma(\nu + 1/2) \Gamma(1/2)}, \quad \nu > -1/2, \quad (6.5.69)$$

où Δ est l'aire du triangle de cotés r, r', r'' si il existe. Sinon l'intégrale vaut zéro. Rappelons que :

$$\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{[(r+r')^2 - r''^2][r''^2 - (r-r')^2]}. \quad (6.5.70)$$

Dans le cas où $\nu = 0$, il vient simplement $\Phi(r, r', r'') = \Delta^{-1}$ si $|r - r'| \leq r'' \leq r + r'$ (condition d'existence du triangle de coté r, r', r'') et zéro sinon. De cette manière la convolution s'obtient de la manière suivante :

$$h(r) = \int_0^{\infty} dr' r' f(r') \int_{|r-r'|}^{r+r'} dr'' \frac{4r''}{\sqrt{[(r+r')^2 - r''^2][r''^2 - (r-r')^2]}} g(r''). \quad (6.5.71)$$

Ce résultat peut être retrouvé par la méthode des coordonnées bi-variables utilisée en physique statistique ([Chan \[1977\]](#)). Elle permet de généraliser le résultat aux fonctions anisotropiques.

Considérations numériques et résultats L'intégrale interne de l'équation (6.5.71) possède une singularité en $1/\sqrt{x}$ à ses bornes et son calcul demande une attention particulière. Elle peut être évaluée grâce à la quadrature dite de Gauss-Chebyshev ([Abramovitz and Stegun \[1970\]](#), p 889) :

$$\int_a^b \frac{f(r)}{\sqrt{(r-a)(b-r)}} dr \simeq \sum_{j=1}^N \frac{\pi}{N} f(r_j), \quad (6.5.72)$$

avec $r_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2j-1}{2N}\pi\right)$.

Dans le cas de fonctions définies sur un intervalle limité L nous pouvons calculer la quantité (6.5.67) en tronquant l'intégrale à $r' = L$:

$$h(r) \simeq \frac{L}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} r_i f(r_i) \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\pi}{N_2} \frac{4r_j g(r_j)}{\sqrt{r_j + r_i + r} \sqrt{r_j + |r - r_i|}} \quad (6.5.73)$$

où r_j est donné dans (6.5.72) avec $a = |r - r'|$, $b = r + r'$.

Dans notre cas où les fonctions à convoluer sont des spectres de puissance définis entre deux bornes r_{min} et r_{max} , un échantillonnage logarithmique est nécessaire pour une bonne précision et il est préférable de calculer l'équation (6.5.71) sous la forme :

$$h(r) \simeq \sum_{i=1}^{N_1} r_i f(r_i) dr_i \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\pi}{N_2} \frac{4r_j g(r_j)}{\sqrt{r_j + r_i + r} \sqrt{r_j + |r - r_i|}} \quad (6.5.74)$$

avec un pas d'échantillonnage dr_i adaptatif. L'échantillonnage logarithmique est très resserré lorsque $r_i \approx k_p$, $r + r_i \approx k_p$ ou $|r - r_i| \approx k_p$ où k_p est la fréquence de pic du spectre. r_j est donné dans (6.5.72) avec $a = |r - r'|$ et $b = r + r'$.

6.5.2.2 Application au calcul de l'émissivité

Cette méthode apporte un gain de temps et de précision très important aux calculs de convolutions radiales et permet donc de calculer (6.5.63) pour n très grand.

De plus le temps de calcul est proportionnel à l'ordre de développement de l'exponentielle puisque $\Gamma \otimes^n = \Gamma \otimes \left[\Gamma \otimes^{n-1} \right]$ et $\Gamma \otimes^{n-1}$ a déjà été calculé à l'itération précédente.

Un gain de temps supplémentaire très important vient du fait que le calcul des convolutions est indépendant du problème électromagnétique. Une fois les convolutions calculées, les diagrammes de diffraction sont très facilement obtenus par pondérations des convolutions par Q_z^2 estimées en \mathbf{Q}_H puisque :

$$\Psi(\mathbf{Q}_H; Q_z) = 4\pi^2 e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(Q_z)^{2n}}{n!} \left[\Gamma \otimes^{n-1} \right] (\mathbf{Q}_H). \quad (6.5.75)$$

Dans ce développement $Q_z^2 \sigma_0^2$ n'est plus forcément petit et tout les termes sont alors complètement atténués près du nadir à cause du $e^{-Q_z^2 \sigma_0^2}$ qui est assimilé à 1 dans le développement classique de SPM. Afin de conserver le premier terme comme dans un vrai développement SPM, on peut faire l'astuce suivante en notant qu'une approximation des convolutions s'écrit : $\Gamma \otimes^n \approx (\sigma_0^2)^n \frac{\Gamma}{\sigma_0^2}$.

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{Q}_H; Q_z) &= 4\pi^2 e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(Q_z^2 \sigma_0^2)^n}{n!} \left[\left(\frac{\Gamma}{\sigma_0^2} \otimes^n \right) - \frac{\Gamma}{\sigma_0^2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Q_z^2 \sigma_0^2)^n}{n!} \frac{\Gamma}{\sigma_0^2} \right\} (\mathbf{Q}_H) \\ &= 4\pi^2 (1 - e^{-Q_z^2 \sigma_0^2}) \frac{\Gamma}{\sigma_0^2} (\mathbf{Q}_H) + 4\pi^2 e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(Q_z^2 \sigma_0^2)^n}{n!} \left[\left(\frac{\Gamma}{\sigma_0^2} \otimes^n \right) - \frac{\Gamma}{\sigma_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.5.76)$$

On retrouve donc le premier terme de SPM qui est le spectre évalué en \mathbf{Q}_H ainsi que des termes correctifs. La normalisation par σ_0^2 des spectres permet aussi une meilleure précision dans le calcul des convolutions radiales puisque elles décroissent moins vite. De plus lorsque n devient très grand le calcul du rapport des deux très grandes quantités $\frac{(Q_z)^{2n}}{n!}$ peut être résolu en tenant compte de la formule de Stirling pour les grandes valeurs de n :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \quad (6.5.77)$$

Le nombre de convolutions minimal à assurer est égal au degré du polynôme qui approxime bien la fonction exponentielle jusqu'à $Q_z^2 \sigma_0^2$. Au delà, la factorielle l'emporte et les termes correctifs deviennent négligeables. Toutefois un algorithme bien plus performant

pourrait être mis en place en identifiant quels sont les monômes les plus importants du polynôme permettant de bien approximer la fonction exponentielle. Le nombre de convolutions à faire serait donc fonction de Q_z et serait très faible.

6.5.3 Résultats numériques

L'intégrale de Kirchhoff est un outils très pratique lorsque la fréquence électromagnétique est élevée car la fonction de corrélation contribue principalement autour de l'origine. Lorsque la fréquence diminue, le terme atténuateur de l'exponentielle décroît beaucoup moins vite et il est nécessaire de calculer la fonction de corrélation plus loin. Celle-ci étant très oscillante, l'intégrande de Kirchhoff devient elle aussi oscillante et plus difficile à calculer (nécessité d'échantillonnage logarithmique et/ou interpolation quadratique).

Pour un vent de 4 m.s^{-1} , une longueur d'onde de $\lambda = 20 \text{ cm}$ (bande L) et dans la configuration monostatique je trace sur la figure 6.10 le résultat de l'intégrale de Kirchhoff :

$$\frac{1}{Q_z^2} \Psi(\mathbf{Q}_H; Q_z) \quad (6.5.78)$$

par le calcul direct et par la méthode des convolutions radiales (équation (6.5.76)). Je représente également le résultat obtenu en fonction du nombre de convolutions prises en compte. On peut voir que l'intégrale de Kirchhoff devient difficile à calculer par le calcul direct lorsque l'angle d'incidence devient grand (Q_z^2 petit). On constate l'inverse dans le cas des convolutions radiales. En effet, plus Q_z^2 est petit plus le nombre de convolutions nécessaire pour approximer $e^{Q_z^2 C}$ est faible. La courbe à $n = 1$ n'est rien d'autre que le spectre de la surface.

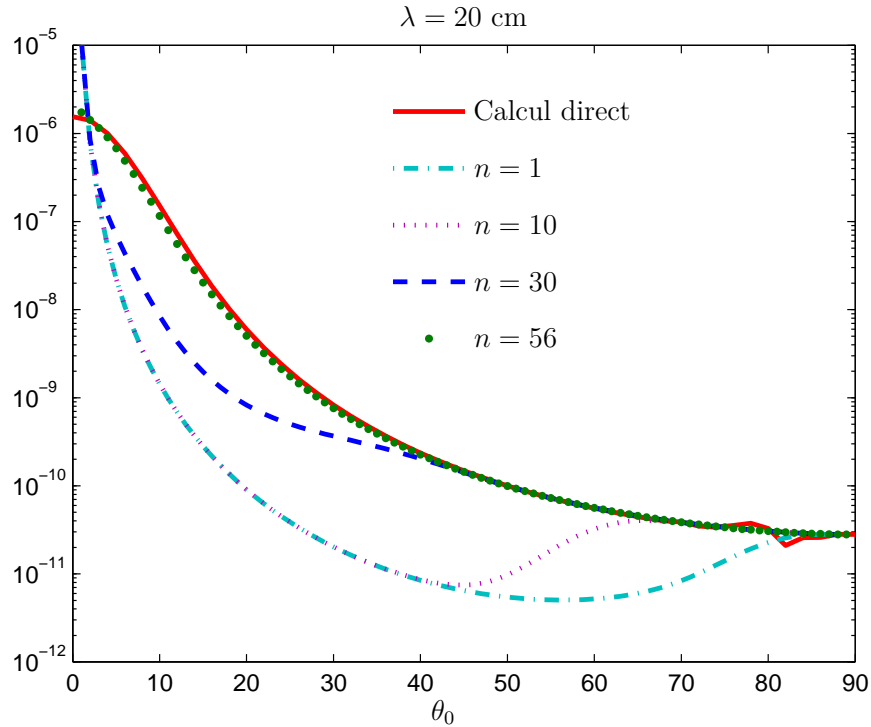


Figure 6.10 – Comparaison du calcul direct avec la méthode des convolutions radiales.

La figure 6.11 obtenue pour une fréquence plus faible ($\lambda = 50 \text{ cm}$) nous montre que le nombre de convolutions nécessaires diminue très rapidement avec la fréquence. La figure

6.12 illustre la capacité de la méthode à générer rapidement des diagrammes de diffusion sur toute la demi-sphère au dessus de la surface. Elle représente l'amplitude de diffraction $\left(\log\left(1 + \Sigma^{(0)}\right)\right)$ dans l'approximation de Kirchhoff en bande L (55 convolutions) pour un vent de 4 m.s^{-1} (spectre isotrope). Sur la vidéo, la direction de l'onde incidente représentée par la ligne rouge varie entre $\theta_0 = 20^\circ$ et $\theta_0 = 62^\circ$ à $\phi_0 = 0$ puis, à $\theta_0 = 62^\circ$ elle varie entre $\phi_0 = 180^\circ$ et $\phi_0 = 120^\circ$

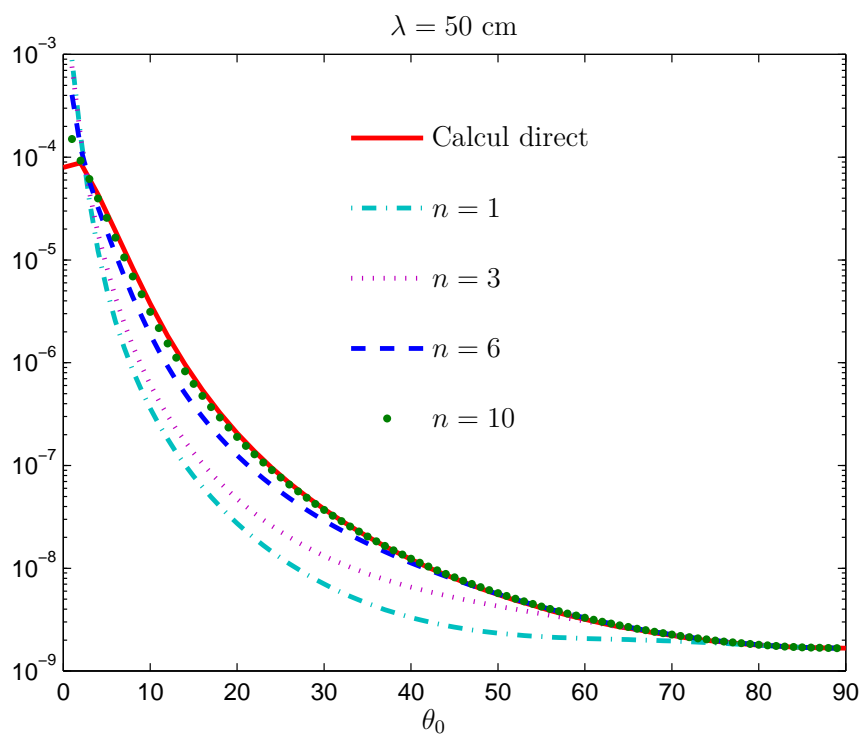


Figure 6.11 – Comparaison du calcul direct avec la méthode des convolutions radiales.

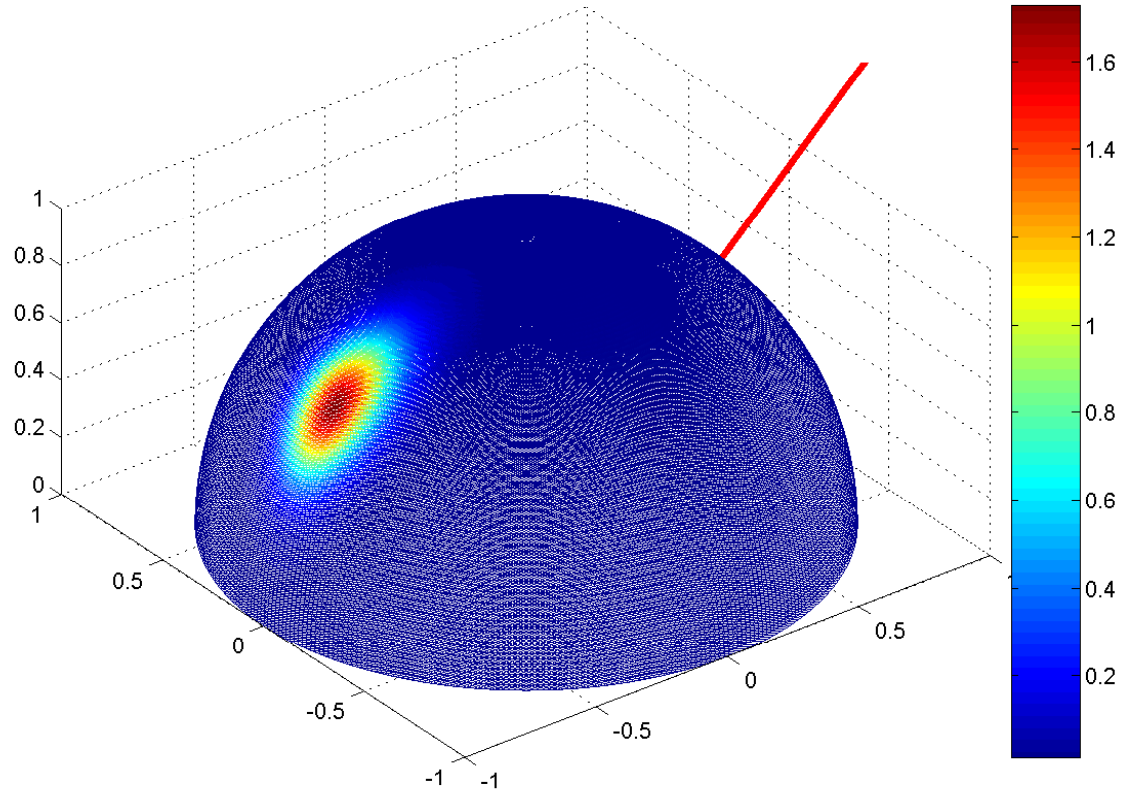


Figure 6.12 – *Diagramme de diffusion 3D. $U_{10} = 4 \text{ m.s}^{-1}$ et $\lambda = 20 \text{ cm}$.*

Cette méthode des convolutions radiales présente de nombreux avantages lorsque l'on s'intéresse aux grands angles d'incidence ou aux grandes longueurs d'onde par des vents modérés. Elle s'applique très bien dans le cas de surfaces Gaussiennes et les difficultés apportées par les noyaux dûs aux nonlinéarités (CWM) où les noyaux plus complexes comme ceux des méthodes de RCA, LCA, WCA, ... sont beaucoup plus facilement intégrables. En effet, lorsque par exemple le noyau dépend des pentes (gradient de la fonction d'autocorrélation), une seule convolution supplémentaire par le spectre du processus des pentes est suffisante. Cette méthode est donc prometteuse et devrait donc pouvoir accélérer quantitativement la plupart des calculs de diffraction électromagnétique et particulièrement ceux faisant intervenir l'émissivité.

Un article traitant des convolutions radiales et de leurs applications aux méthodes de diffraction est d'ailleurs en cours de rédaction.

Chapitre 7

Prise en compte de l'écume

Sommaire

7.1 Description de l'écume	81
7.2 Effet sur la NRCS totale	85

7.1 Description de l'écume

7.1.1 Modélisation d'une parcelle d'écume

Bien que la fraction de surface de mer couverte par de l'écume n'exède rarement les 10 % pour des vents forts et modérés (*Monahan and Muircheartaigh* [1980]), son impact sur l'émissivité et la température de brillance reste très important (*Rosenkranz and Staelin* [1972]; *Stogryn* [1971]; *Monahan* [2002]). L'écume est un milieu complexe. Il est généralement décrit par un ensemble de bulles d'air entourées d'une fine pellicule d'eau dont la taille et la densité varient en fonction de la profondeur et de l'âge de l'écume (*Zhou et al.* [2003]; *Camps et al.* [2005]). L'épaisseur et la surface des facettes d'écume varient avec la taille de la vague qui les porte, de la longueur du front déferlant, de sa vitesse et donc indirectement du vent qui les a créés. Dans la littérature on discerne généralement deux types d'écume en fonction leur âge (*Bondur and Sharkov* [1982]), l'écume dynamique fraîchement créée sur la crête d'une vague déferlante, plus dense, et l'écume résiduelle statique qui persiste plus longtemps sur la surface de la mer (jusqu'à plusieurs secondes). Leurs différentes proportions à la couverture d'écume totale peuvent être trouvées dans *Bondur and Sharkov* [1982].

Récemment *Reul and Chapron* [2003] ont proposé une distribution dynamique des tailles et épaisseurs des parcelles d'écume en fonction du temps et de la taille de la vague. Ils se basent sur une hypothèse d'auto-similarité de la géométrie des vagues déferlantes établie par *Duncan* [1981] et proposent en particulier une estimation de l'épaisseur moyenne des parcelles d'écume en fonction du vent.

Bien que comme le décrit *Bortkovskii* [1987], le moutonnement ressemble à un prisme d'écume posé sur la vague déferlante, nous le modélisons par simplicité comme un parallépipède orienté selon la pente de la vague qui le porte. La figure 7.1 représente la géométrie du problème.

En bande L et C, la taille des bulles d'air formant l'écume étant petites devant la longueur d'onde, il est possible d'appliquer des techniques d'homogénéisation type Maxwell-Garnett sur la parcelle d'écume afin d'obtenir une permittivité moyenne. L'écume sera alors

considérée comme un milieu homogène de permittivité équivalente. Dans son article, [Anguelova \[2008\]](#) concilie les résultats de différentes méthodes d'homogénéisation appliquées au cas de l'écume. Elle les présente en fonction de la fraction d'air, de la température et la salinité de l'eau et de la fréquence électromagnétique utilisée.

7.1.2 Description électromagnétique

Nous décrivons à présent le problème électromagnétique prenant en compte les parcelles d'écume à la surface de la mer comme une perturbation du problème de référence. Celui-ci étant décrit dans la partie 6.1 et sans la couche d'écume. La géométrie du problème est représentée sur la figure 7.1.

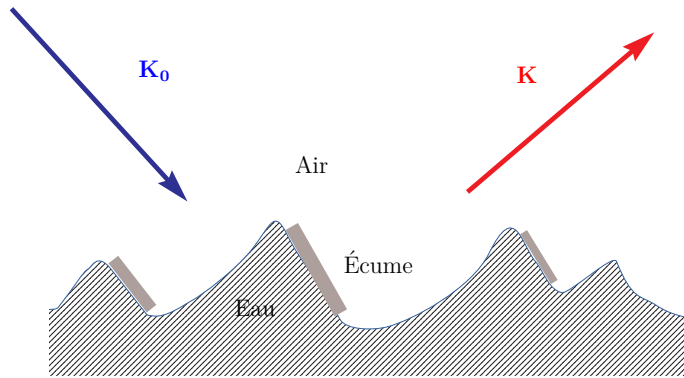


Figure 7.1 – Géométrie du problème de diffusion.

Au dessus de la surface, en un point \mathbf{R}_1 on peut écrire le champ électromagnétique :

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}_1) = \mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{R}_1) + K_0^2 \int \chi(\mathbf{R}) \mathbb{G}_{\text{ref}}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}) \mathbf{E}(\mathbf{R}) d\mathbf{R}, \quad (7.1.1)$$

où $\mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{R}_1)$ est le champ qu'il y aurait au point \mathbf{R}_1 sans l'interface marine et sans l'écume. $\chi(\mathbf{R})$ est le contraste de permittivité électromagnétique avec le problème de référence et K_0 le vecteur d'onde incident. $\mathbb{G}_{\text{ref}}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R})$ est la fonction de Green du problème de référence qui lie le champ créé au point \mathbf{R}_1 au champ source en \mathbf{R} en présence de la mer. De part le théorème de réciprocité nous pouvons écrire :

$$\mathbb{G}_{\text{ref}}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}) = \mathbb{G}_{\text{ref}}^*(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1), \quad (7.1.2)$$

où $\mathbb{G}_{\text{ref}}^*$ est la dyade adjointe. Cette égalité revient à dire que le problème où la source électromagnétique est située en \mathbf{R} et le champ évalué en \mathbf{R}_1 est équivalent au problème où la source est en \mathbf{R}_1 et le champ évalué en \mathbf{R} .

En supposant donc que le champ en \mathbf{R} au voisinage de la surface est celui produit par le plan local tangent à la surface au point le plus près appartenant à la surface : \mathbf{R}_Σ (Approche Kirchhoff) et en considérant une source lointaine ($R_1 \rightarrow +\infty$, $\hat{\mathbf{R}}_1 = -\hat{\mathbf{K}}$), la dyade de Green peut s'écrire :

$$\mathbb{G}_{\text{ref}}^*(\mathbf{R}, \mathbf{R}_1) \simeq \frac{e^{iKR_1}}{4\pi R_1} [\mathbb{I} + e^{2i\mathbf{K}^\perp \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_\Sigma)} \mathbb{R}^*(-\mathbf{K}; \hat{\mathbf{n}})] e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \quad (7.1.3)$$

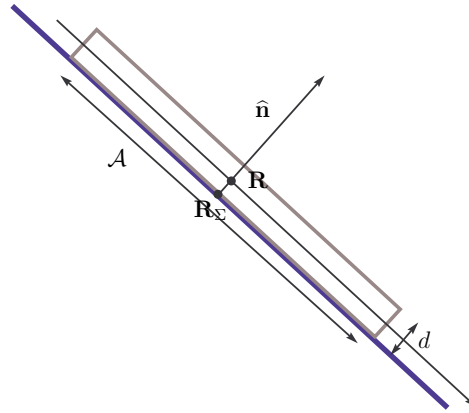


Figure 7.2 – Géométrie d'une parcelle d'écume.

où \mathbb{R} est le coefficient de réflexion de Fresnel à l'interface Air/eau, \mathbf{R}_Σ est le point de la surface qui minimise la distance à \mathbf{R} et $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur normal unitaire à la surface à ce point.

Afin de décrire le champ $E(\mathbf{R})$ à l'intérieur de la couche d'écume, nous allons utiliser une meilleure approximation. Nous décrivons localement la couche d'écume comme un bi-couche comme nous le montre la figure 7.2. En restant dans une approche de type Kirchhoff, le champ à l'intérieur de la couche d'écume en \mathbf{R} peut s'écrire :

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \left(\mathbb{D}(\mathbf{K}_0; \hat{\mathbf{n}}; d) e^{i\mathbf{K}'_0 \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_\Sigma)} + \mathbb{U}(\mathbf{K}_0; \hat{\mathbf{n}}; d) e^{i\mathbf{K}'_0 \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_\Sigma)} \right) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}_\Sigma} \quad (7.1.4)$$

où $\mathbf{K}'_0^\pm = \mathbf{K}_{0\parallel} \pm q'_0 \hat{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{K}_{0\parallel}$ projection de \mathbf{K}_0 sur le plan tangent) est le vecteur d'onde montant (+) et descendant (−) dans le milieu et \mathbb{D} et \mathbb{U} sont respectivement les operateurs de réflexion du bi-couche formé par l'écume et l'eau pour les ondes descendante et montante dans la couche d'épaisseur d et de vecteur normal $\hat{\mathbf{n}}$. Les expressions des coefficients du bi-couche peuvent être trouvées en annexe D.2.2.

Il vient que le champ total au point \mathbf{R}_1 peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}_1) &= \mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{R}_1) + \frac{e^{iKR_1}}{4\pi R_1} \int \chi(\mathbf{R}) K_0^2 \left(\mathbb{I} + \mathbb{R}^*(-\mathbf{K}; \hat{\mathbf{n}}) e^{2i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_\Sigma)} \right) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \\ &\times \left(\mathbb{D}(\mathbf{K}_0; \hat{\mathbf{n}}; d) e^{i\mathbf{K}'_0 \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_\Sigma)} + \mathbb{U}(\mathbf{K}_0; \hat{\mathbf{n}}; d) e^{i\mathbf{K}'_0 \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_\Sigma)} \right) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}_\Sigma} d\mathbf{R}. \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

Le champ diffracté $\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_i$ à l'infini ($R \rightarrow +\infty$, $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{K}}$) est défini par l'amplitude de diffraction \mathbb{S} de la manière suivante :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{R}) = \frac{e^{iKR}}{iR} \mathbb{S}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{E}_0 \quad (7.1.6)$$

où \mathbf{K} est le vecteur d'onde diffracté. En considérant que le contraste de l'écume est le même sur toute la parcelle d'écume $\chi(\mathbf{R}) = \chi$ il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0) &= \mathbb{S}_{\text{ref}}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0) + \frac{i}{4\pi} \chi K_0^2 \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{R} \left(\mathbb{I} + \mathbb{R}^*(-\mathbf{K}; \hat{\mathbf{n}}) e^{2i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_\Sigma)} \right) \\ &\times \left(\mathbb{D}(\mathbf{K}_0; \hat{\mathbf{n}}; d) e^{i\mathbf{K}'_0 \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_\Sigma)} + \mathbb{U}(\mathbf{K}_0; \hat{\mathbf{n}}; d) e^{i\mathbf{K}'_0 \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_\Sigma)} \right) e^{i(\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{R}_\Sigma} e^{-i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_\Sigma)}. \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

7.1.3 Contribution de l'écume

Nous faisons l'hypothèse d'une contribution incohérente des parcelles d'écume sur la NRCS. Celle-ci peut donc se décomposer de la forme :

$$\Sigma^{(0)} = \Sigma_{ref}^{(0)} + \Sigma_{foam}^{(0)} \quad (7.1.8)$$

où $\Sigma_{foam}^{(0)} = 4\pi|\mathbb{S}_{foam}|^2$ est la contribution de l'écume.

Sachant que les contributions de chaque parcelle sur la NRCS totale seront incohérentes entre elles, nous pouvons calculer la contribution d'une parcelle déterministe. Dans le cas où la parcelle est définie par sa normale $\hat{\mathbf{n}}$ et son épaisseur d comme sur la figure 7.2 nous pouvons écrire en notant \mathbf{R}_Σ un vecteur parcourant la facette :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{foam}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0) &= \frac{i}{4\pi} \chi \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{R}_\Sigma dz_n \left(\mathbb{I} + \mathbb{R}^*(-\mathbf{K}; \hat{\mathbf{n}}) e^{2i(\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}})z_n} \right) \\ &\times \left(\mathbb{D}(\mathbf{K}_0; \hat{\mathbf{n}}; d) e^{i(\mathbf{K}_0' \cdot \hat{\mathbf{n}})z_n} + \mathbb{U}(\mathbf{K}_0; \hat{\mathbf{z}}; d) e^{i(\mathbf{K}_0' \cdot \hat{\mathbf{n}})z_n} \right) e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_\Sigma} e^{-i\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}}z_n}. \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Nous prenons le carré de $|\mathbb{S}_{foam}|$ et réalisons l'intégration sur la surface de la parcelle en considérant que celle-ci est grande devant la longueur d'onde :

$$\int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}} e^{i\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R}_\Sigma - \mathbf{R}'_\Sigma)} d\mathbf{R}_\Sigma d\mathbf{R}'_\Sigma = \mathcal{A} \int_{\mathcal{A}_\parallel} (1 + |\mathbf{s}|^2) e^{-i(\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r} + Q_z \mathbf{s} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r} \quad (7.1.10)$$

$$\approx \mathcal{A} (2\pi)^2 (1 + |\mathbf{s}|^2) \delta(\mathbf{Q}_H + Q_z \mathbf{s}). \quad (7.1.11)$$

\mathcal{A}_\parallel est la projection sur l'horizontale de la parcelle \mathcal{A} et $\mathbf{s} = \nabla h$ est le gradient de la surface sur la parcelle ($d\mathbf{R}'_\Sigma = \sqrt{1 + |\mathbf{s}|^2} d\mathbf{r}$). Notons que

$$(1 + s^2) \delta(\mathbf{Q}_H + Q_z \mathbf{s}) \approx \left(1 + \left(\frac{Q_H}{Q_z} \right)^2 \right) \frac{1}{Q_z^2} \delta\left(\mathbf{s} + \frac{\mathbf{Q}_H}{Q_z}\right) \quad (7.1.12)$$

$$\approx \frac{Q^2}{Q_z^4} \delta\left(\mathbf{s} + \frac{\mathbf{Q}_H}{Q_z}\right). \quad (7.1.13)$$

En rappelant que $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{s} - \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + |\mathbf{s}|^2}}$, l'intégration horizontale sur la parcelle d'écume donne :

$$|\mathbb{S}_{foam}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0)|^2 \approx \mathcal{A} \frac{Q^2 K_0^2}{Q_z^4} |\mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0, \hat{\mathbf{Q}}, d, \epsilon_f)|^2 \delta\left(\mathbf{s} + \frac{\mathbf{Q}_H}{Q_z}\right) \quad (7.1.14)$$

où $\hat{\mathbf{Q}}$ est le vecteur d'Ewald normé et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0, \hat{\mathbf{n}}, d, \epsilon_f) &= \frac{iK_0 \chi}{2} \int_0^d dz_n \left(\mathbb{I} + \mathbb{R}^*(-\mathbf{K}; \hat{\mathbf{n}}) e^{2i(\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}})z_n} \right) \\ &\times \left(\mathbb{D}(\mathbf{K}_0; \hat{\mathbf{n}}; d) e^{i(\mathbf{K}_0' \cdot \hat{\mathbf{n}})z_n} + \mathbb{U}(\mathbf{K}_0; \hat{\mathbf{z}}; d) e^{i(\mathbf{K}_0' \cdot \hat{\mathbf{n}})z_n} \right) e^{-i\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}}z_n} \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

avec ϵ_f la permittivité électrique de l'écume.

En configuration monostatique

$$|\mathbb{S}_{foam}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0)|^2 \approx \mathcal{A} \frac{Q^4}{4Q_z^4} |\mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0, \hat{\mathbf{Q}}, d, \epsilon_f)|^2 \delta\left(\mathbf{s} + \frac{\mathbf{Q}_H}{Q_z}\right) \quad (7.1.16)$$

et on retrouve bien la forme de l'expression de Kirchhoff sur une facette qui s'écrit :

$$|\mathbb{S}_{KA}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0)|^2 \approx \mathcal{A} \frac{Q^4}{4Q_z^4} |\mathbb{R}(\mathbf{0})|^2 \delta\left(\mathbf{s} + \frac{\mathbf{Q}_H}{Q_z}\right). \quad (7.1.17)$$

Evaluation de $|\mathcal{F}|^2$

En notant que pour $q \in \mathbb{C}$:

$$\int_0^d e^{-iqz} dz = d \operatorname{sinc}\left(\frac{qd}{2}\right) e^{-i\frac{qd}{2}} \quad (7.1.18)$$

où le sinc d'une variable complexe z est complexe et s'écrit :

$$\operatorname{sinc}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz} \quad (\operatorname{sinc}^*(z) = \operatorname{sinc}(z^*)). \quad (7.1.19)$$

L'intégration sur l'épaisseur de la couche d'écume mène en notant

$$\phi_1 = \frac{(\mathbf{K} + \mathbf{K}_0'^+) \cdot \hat{\mathbf{n}}d}{2} \quad \text{et} \quad \phi_2 = \frac{(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0'^+) \cdot \hat{\mathbf{n}}d}{2} : \quad (7.1.20)$$

$$|\mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0, \hat{\mathbf{n}}, d, \epsilon_f)|^2 = \frac{\chi^2 K_0^2 d^2}{4} \left| \operatorname{sinc}(\phi_1) (\mathbb{D}e^{i\phi_1} + \mathbb{R}^* \mathbb{U}e^{-i\phi_1}) + \operatorname{sinc}(\phi_2) (\mathbb{U}e^{-i\phi_2} + \mathbb{R}^* \mathbb{D}e^{i\phi_2}) \right|^2. \quad (7.1.21)$$

7.2 Effet sur la NRCS totale**7.2.1 Approximations**

La contribution de toutes les parcelles d'écume à la NRCS globale s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \Sigma_{foam}^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0) &= \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{S} \int_S \int \mathcal{D}(\mathcal{A}, e, \mathbf{s}) \mathcal{A} \frac{Q^2 K_0^2}{Q_z^4} |\mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0, \hat{\mathbf{Q}}, d, \epsilon_f)|^2 \delta\left(\mathbf{s} + \frac{\mathbf{Q}_H}{Q_z}\right) d\mathcal{A} ds de \\ &= \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{S} \frac{Q^2 K_0^2}{Q_z^4} \int_S \mathcal{D}\left(\mathcal{A}, e, \frac{\mathbf{Q}_H}{Q_z}\right) |\mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0, \hat{\mathbf{Q}}, d, \epsilon_f)|^2 \mathcal{A} d\mathcal{A} de \end{aligned} \quad (7.2.22)$$

où S est la surface totale éclairée et $\mathcal{D}(\mathcal{A}, e, \mathbf{s})$ la distribution jointe des parcelles d'écume d'aire \mathcal{A} , d'épaisseur e , et de pente \mathbf{s} .

Aires des parcelles indépendantes Si l'on considère que la taille des parcelles d'écume est indépendante des autres paramètres, alors

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \int_S \mathcal{D}(\mathcal{A}) \mathcal{A} d\mathcal{A} = \mathcal{A}_e = S f \quad (7.2.23)$$

où \mathcal{A}_e est l'aire totale d'écume sur la surface S et f est la couverture d'écume. Il vient donc en première approximation :

$$\Sigma_{foam}^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0) = 4\pi f \frac{Q^2 K_0^2}{Q_z^4} \int \mathcal{D}(e, \hat{\mathbf{Q}}) |\mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0, \hat{\mathbf{Q}}, e, \epsilon_f)|^2 de.$$

Configuration monostatique D'après notre modélisation, la parcelle d'écume ne renvoie que selon l'angle spéculaire. En configuration monostatique, la fonction \mathcal{F} ne sera donc évaluée que sous une incidence locale nulle : $\mathcal{F}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0, \hat{\mathbf{Q}}, e, \epsilon_f) = F_\perp(K_0, e, \epsilon_f)$ et $Q^2 = 4K_0^2$.

$$\Sigma_{foam}^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0) = \pi f \frac{Q^4}{Q_z^4} \int \mathcal{D}(e, \hat{\mathbf{Q}}) |F_\perp(K_0, e, \epsilon_f)|^2 de.$$

Épaisseur constante Finalement, si l'épaisseur de toutes les parcelles est considérée constante et égale à d , la contribution s'écrit :

$$\Sigma_{foam}^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0) = \pi f \frac{Q^4}{Q_z^4} \mathcal{D}(\hat{\mathbf{Q}}) |\mathcal{F}_\perp(K_0, d, \epsilon_f)|^2 \quad (7.2.24)$$

où \mathcal{D} est la distribution des pentes des vagues qui sont couvertes d'écume.

7.2.2 Modèles existants

L'équation (7.2.24) peut être réécrite sous la forme

$$\Sigma_{foam}^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0) = \pi \frac{f |\mathcal{F}_\perp(K_0, d, \epsilon_f)|^2}{\cos^4(\theta_0)} \mathcal{D}(\hat{\mathbf{Q}}) \quad (7.2.25)$$

qui se compare très bien avec l'expression obtenue par *Voronovich and Zavorotny [2001]* :

$$\Sigma_{Non-Bragg}^{(0)}(\mathbf{K}, \mathbf{K}_0) = \pi \frac{\mathbb{R}(0)}{\cos^4(\theta_0)} \mathcal{D}(\hat{\mathbf{Q}}). \quad (7.2.26)$$

Voronovich utilise une description Gaussienne de la surface pour calculer la NRCS $\Sigma_{Bragg}^{(0)}$. L'ajout d'une partie incohérente $\Sigma_{Non-Bragg}^{(0)}$ lui permet de prendre en compte les vagues pentues qui n'apparaissent pas dans la modélisation Gaussienne :

$$\Sigma^{(0)} = \Sigma_{Bragg}^{(0)} + \Sigma_{Non-Bragg}^{(0)}. \quad (7.2.27)$$

Il applique un raisonnement d'Optique Géométrique sur les vagues très cambrées ("steep waves") et considère que la faible proportion de ces vagues sur la surface de la mer permet d'ajouter leur contribution de manière incohérente à la NRCS. Dans notre approche, le CWM inclue déjà la contribution de ces vagues cambrées et la correction apportée n'est relative qu'à l'écume. Celle-ci n'étant portée que par les vagues les plus cambrées, il est normal de retrouver une forme similaire.

Voronovich se sert des modèles empiriques CMOD2-I3 et SASS-II pour déduire une distribution des pentes aux grands arguments à partir de l'équation (7.2.26). Nous opérerons le raisonnement inverse et calculons la contribution de l'écume en supposant la distribution des pentes égale à celle développée en partie (2.1.2).

De la même manière que Voronovich, *Kudryavtsev et al. [2003]* propose d'écrire la NRCS totale sous la forme :

$$\Sigma^{(0)} = \Sigma_{Bragg}^{(0)} + \Sigma_{sp}^{(0)} + \Sigma_{wb}^{(0)} \quad (7.2.28)$$

où $\Sigma_{Bragg}^{(0)}$ est la contribution de Bragg considérée ici aussi sous l'hypothèse d'une surface de mer Gaussienne, $\Sigma_{sp}^{(0)}$ la contribution des vagues réfléchissant spéculairement l'onde incidente ("sea spikes") et $\Sigma_{wb}^{(0)}$ la contribution des vagues déferlantes. Tout comme notre modèle les corrections à la théorie de Bragg sont insensibles à la polarisation et dépendent linéairement de la couverture d'écume. Elles apportent donc une correction beaucoup plus importante en polarisation HH qu'en polarisation VV (Bragg sous estime systématiquement la NRCS en polarisation H) et sont d'autant plus importantes que le vent est fort. Notre théorie reste donc en accord avec celle de Voronovich et Kudryavtsev.

Phillips [1988] propose une correction au terme de Bragg sous la forme :

$$\Sigma_{Phillips}^{(0)} = F_2(\theta_0, \phi_0) \left(\frac{u_*^2 \kappa}{g} \right)^{3/2} \quad (7.2.29)$$

où u_* est la vitesse de friction, κ la longueur d'onde électromagnétique et F_2 une fonction dépendant de la géométrie du problème. La dépendance de notre modèle à ces paramètres n'étant pas explicite nous ne pousserons pas la comparaison plus loin mais nous comparerons nos résultats aux conclusions apportées par Phillips.

7.2.3 Résultats numériques

Comme nous l'avons vu en partie 7.1.1 la modélisation des parcelles d'écume et des vagues déferlantes reste un problème ouvert et la distribution jointe de la taille des facettes des vagues couverte d'écume, de leur épaisseur, de leur permittivité et de leur pente n'est pas encore établie. Afin de quantifier la contribution des facettes d'écume sur le diagramme de diffraction nous allons donc tracer la NRCS : $\Sigma_{foam}^{(0)}$ pour différentes configurations selon les hypothèses obtenues en partie 7.2.1. Les plus grandes différences observées entre les prédictions théoriques et les mesures sont observées aux grands angles et principalement selon la polarisation HH. Sur les figures suivantes nous reportons donc le diagramme monostatique obtenu selon l'approximation SSA dans le cadre du CWM en polarisation HH et VV ainsi que la NRCS de l'écume. Cette dernière étant calculée à partir de l'équation (7.2.24) où le facteur \mathcal{F}_\perp est évalué à un angle incident local nul est insensible à la polarisation.

Nous travaillerons en bande C (6 GHz) pour laquelle la couche d'écume est optiquement assez épaisse pour contribuer à la NRCS et cependant assez fine pour pouvoir faire les hypothèses d'homogénéisation et de couches d'écume fines devant la longueur d'onde. La bande L est clairement insensible à la pellicule d'écume trop petite par rapport à la longueur d'onde. La permittivité relative de l'eau est considérée approximativement égale à $\epsilon_r = 60 + i 60$ en bande C et elle varie quasi-linéairement avec la fraction d'air. Comme le montre *Reul and Chapron [2003]*, le pourcentage d'air dans l'écume varie au cours de son évolution : l'écume fraîchement créée sur la crête des vagues contient plus d'air que l'écume dite résiduelle ou statique en fin de vie. Pour chaque simulation, nous tracerons donc un faisceau de courbes de la NRCS de l'écume correspondant aux fractions d'air $f_a = 20\%, 40\%, 60\%$ et 80% afin de pouvoir quantifier à chaque fois l'importance de la permittivité. L'étude de *Reul and Chapron [2003]* conclue que l'épaisseur moyenne des couches d'écume statique reste toujours inférieure à 3.5 cm pour un différentiel de température eau-air de 10 degrés. Quasi-nulle pour un vent de 5 m.s^{-1} , elle atteint 0.5 cm à 9 m.s^{-1} , 1.5 cm à 15 m.s^{-1} puis 3.5 cm à 20 m.s^{-1} . Nous traçons les courbes pour ces trois derniers vents et pour des épaisseurs égales à celles donnée par *Reul and Chapron [2003]* et pour des couches moitié plus fines.

A partir de photographies de la mer *Monahan and Muircheartaigh [1980]* ont proposé une équation permettant d'obtenir la couverture d'écume en fonction de la vitesse du vent :

$$f = 3.84 \times 10^{-6} U_{10}^{3.41}. \quad (7.2.30)$$

Cette dépendance représentée sur la figure 7.3 sera adoptée pour les simulations.

Influence de la distribution des pentes La distribution des pentes de vagues cambrées obtenues par *Voronovich and Zavorotny [2001]* possède une décroissance très lente aux grands arguments témoignant de sa non-Gaussianité. Il est donc important de s'intéresser à l'influence de la distribution des pentes sur la forme de $\Sigma_{foam}^{(0)}$. La figure 7.4 représente la contribution de l'écume obtenue avec une distribution Gaussienne ($\Sigma_{foam}^{(0)}$) et non-Gaussienne ($\tilde{\Sigma}_{foam}^{(0)}$) des pentes en configuration monostatique et pour un vent de 15 m.s^{-1}

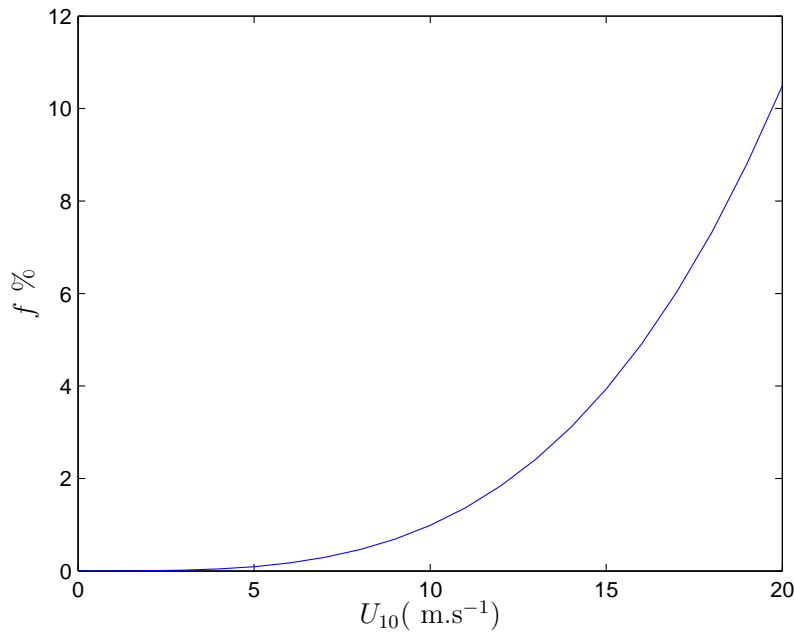


Figure 7.3 – Couverture d'écume en fonction du vent de [Monahan and Muircheartaigh \[1980\]](#).

en Bande C. Les distributions des pentes sont respectivement prises égales à P_2 et \tilde{P}_2 . L'épaisseur moyenne des parcelles d'écume est prise égale à 1.5 cm. Nous supposons que la distribution des pentes des vagues déferlantes P_{bw} est égale à celle des pentes des vagues \tilde{P}_2 . Nous n'avons représenté l'influence de l'écume qu'au delà de 35 degrés, un seuil que nous avons fixé et qui correspond approximativement au seuil de déferlement. La valeur de $\Sigma_{foam}^{(0)}$ autour de ce seuil reste cependant à modérer car P_{bw} y est probablement très inférieure à \tilde{P}_2 .

Nous voyons qu'il est très important de prendre en compte la non Gaussianité de la distribution des pentes. En effet les vagues déferlantes sont celles qui présentent les plus grandes pentes mieux décrites par le CWM. Dans la suite, nous garderons donc \tilde{P}_2 .

Influence de l'épaisseur La figure 7.5 représente la NRCS de l'écume en bande C. l'épaisseur d'écume est choisie de 0.25 cm et 0.5 cm sur les figures 7.5(a) et 7.5(d) où le vent est de 9 m.s⁻¹, de 0.75 cm et 1.5 cm sur les figures 7.5(b) et 7.5(e) où le vent est de 15 m.s⁻¹ et de 1.75 cm et 3.5 cm sur les figures 7.5(c) et 7.5(f) où le vent est de 20 m.s⁻¹.

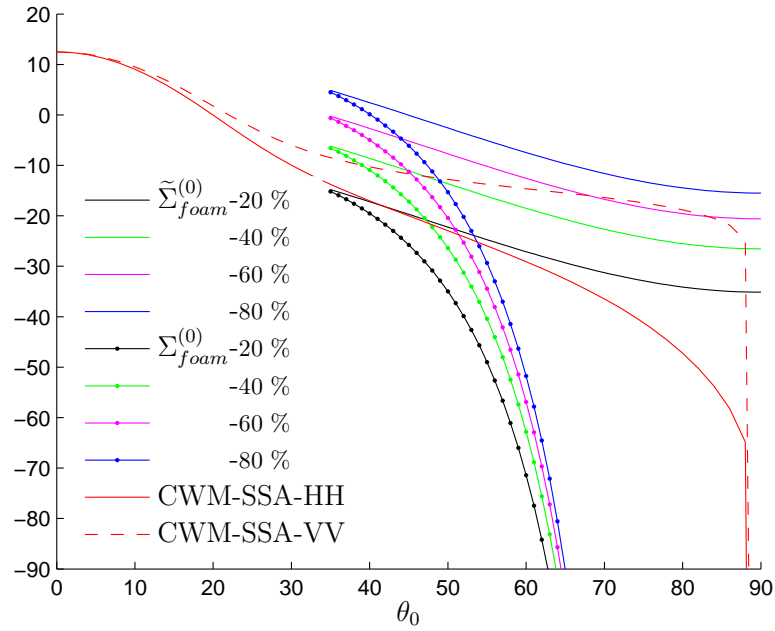


Figure 7.4 – Influence de la distribution des pentes sur la contribution de l'écume. Bande C. Les deux faisceaux de courbes sont obtenus pour des fractions d'air de l'écume égales à 20%, 40%, 60% et 80% pour une distribution des pentes Gaussienne ($\Sigma_{foam}^{(0)}$) et non-Gaussienne ($\tilde{\Sigma}_{foam}^{(0)}$).

De manière générale, on peut voir sur la figure 7.5 que dans la plupart des cas l'écume agit sur la NRCS aux grands angles et ne modifie quasiment que la polarisation HH. Aux angles modérés, elle vient apporter des modifications importantes au delà d'un vent de 15 m.s^{-1} et semble devenir le phénomène prépondérant de la NRCS totale pour des vents très forts. Toutefois l'épaisseur de 3.5 cm considérée sur la figure 7.5(f) est l'épaisseur des parcelles d'écumes statiques. D'après *Reul and Chapron [2003]* l'épaisseur moyenne des couches d'écume dynamiques (prépondérantes au delà de $U_{10} = 15 \text{ m.s}^{-1}$) est plutôt de l'ordre de 1.5 cm. La courbe 7.5(c) semble donc plus réaliste pour un vent de 20 m.s^{-1} .

Un article traitant de l'impact de l'écume en micro-ondes et présentant ces résultats est également en fin de rédaction et sera soumis très prochainement.

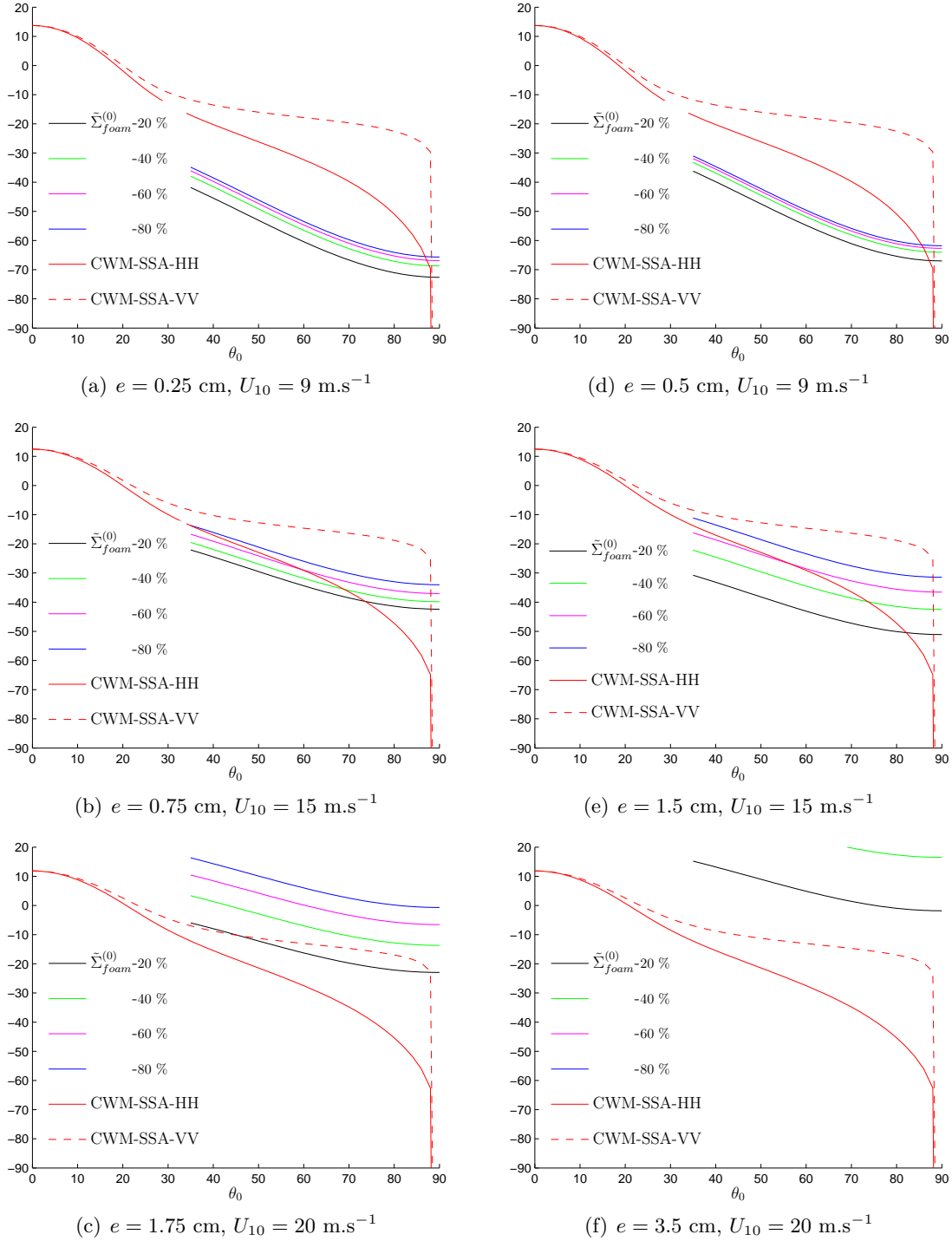


Figure 7.5 – Surface équivalente radar de l'écume sur la NRCS en Bande C.

Conclusion générale

Dans ce manuscrit, nous traitons de la diffusion électromagnétique par la surface océanique. Nous avons étudié l'impact sur le diagramme de diffraction des nonlinéarités hydrodynamiques et de la présence d'écume sur la surface de la mer.

En première partie nous avons décrit un modèle nommé "Choppy Wave Model" prenant en compte les nonlinéarités de la surface. Il est basé sur la résolution des équations Lagrangiennes du mouvement et permet une formulation simple des nonlinéarités. Nous avons déterminé les propriétés statistiques de premier et second ordre des élévations et des pentes en deux comme en trois dimensions et mis en évidence leur non Gaussianité. Les comparaisons aux modèles perturbatifs déjà existants et aux données expérimentales montrent une très bonne concordance.

Le "Choppy Wave Model" prend en compte le déplacement horizontal des particules d'eau et peut se traduire comme un changement des coordonnées horizontales d'une surface linéaire pour la génération de surfaces. Cette transformation modifie sensiblement le spectre des hauteurs particulièrement à grands vents où les nonlinéarités hydrodynamiques deviennent plus importantes. Nous avons mis au point une méthode permettant de calculer le spectre orbital des particules d'eau (spectre déshabillé) connaissant celui de la surface (spectre habillé).

Enfin nous avons présenté quelques simulations de surfaces linéaires et nonlinéaires aléatoires évoluant dans le temps pour illustrer l'aspect visuel de la transformation et mettre en évidence la modulation hydrodynamique des petites vagues par les grandes.

En seconde partie, nous proposons une méthode d'inclusion des nonlinéarités hydrodynamiques dans les calculs de diffusion électromagnétique. La transformation nonlinéaire du "Choppy Wave Model" s'écrit comme un changement de variable sur l'intégrale de Kirchhoff classique et permet une formulation statistique de la Surface Equivalente Radar en présence de nonlinéarités. Les résultats obtenus quantifient leur impact et permettent de s'affranchir des erreurs dues à l'hypothèse de Gaussianité dans l'estimation des données météo-océaniques.

Nous proposons une nouvelle méthode de calcul de l'intégrale de Kirchhoff basée sur des convolutions radiales rapides pour améliorer la précision et les temps de calculs. L'application de cette méthode au calcul de l'émissivité est donc prometteuse et fait l'objet de la rédaction d'un article. L'inclusion de noyaux différents permettant de prendre en compte des effets tels que les nonlinéarités, les effets de pentes et de courbures dans des méthodes comme WCA, RCA, ... y est très simple.

Finalement, nous présentons une manière simple de tenir compte de la présence de l'écume sur la surface marine. Un modèle de facettes permet de calculer la section efficace radar de l'écume supposée incohérente et de quantifier son impact en micro-ondes. Les principaux résultats montrent une forte influence à grands vents sur la polarisation HH

systématiquement sous-estimée dans la théorie de Bragg.

Annexes

Annexe A

Processus Gaussiens et propriétés

Sommaire

A.1 Représentation spectrale	95
A.2 Propriétés générales	96

A.1 Représentation spectrale

A.1.1 Spectre et surface figée

Sous sa représentation spectrale, une surface linéaire évoluant dans le temps s'écrit :

$$h(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} \hat{h}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega \quad (\text{A.1.1})$$

où $\hat{h}(\mathbf{k}, \omega)$ est l'amplitude complexe spatio-temporelle. La relation de dispersion des ondes de gravité $\omega^2 = g|\mathbf{k}|$ impose l'écriture de l'amplitude complexe sous la forme :

$$\hat{h}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{h}^+(\mathbf{k}) \delta(\omega - \sqrt{g|\mathbf{k}|}) + \hat{h}^-(\mathbf{k}) \delta(\omega + \sqrt{g|\mathbf{k}|}) \quad (\text{A.1.2})$$

et la surface :

$$h(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{h}^+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} + \int_{\mathbb{R}^2} \hat{h}^-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} d\mathbf{k} \quad (\text{A.1.3})$$

Celle-ci étant réelle, il vient que $\hat{h}(-\mathbf{k}, -\omega) = \hat{h}^*(\mathbf{k}, \omega)$, soit

$$\hat{h}^+(-\mathbf{k}) = \hat{h}^{-*}(\mathbf{k}) \quad \text{et} \quad \hat{h}^-(-\mathbf{k}) = \hat{h}^{+*}(\mathbf{k}) \quad (\text{A.1.4})$$

En réécrivant (A.1.3) sous la forme

$$\begin{aligned} h(\mathbf{r}, t) &= \int_{\mathbb{R}^{2+}} \hat{h}^+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} + \int_{\mathbb{R}^{2+}} \hat{h}^+(-\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} d\mathbf{k} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{2+}} \hat{h}^-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} d\mathbf{k} + \int_{\mathbb{R}^{2+}} \hat{h}^-(-\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{A.1.5})$$

où \mathbb{R}^{2+} est le demi-espace parcouru par tous les \mathbf{k} tels que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} > 0$ et en utilisant (A.1.4) il vient :

$$h(\mathbf{r}, t) = 2\mathcal{R}e \left[\int_{\mathbb{R}^{2+}} \hat{h}^+(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} \right] + 2\mathcal{R}e \left[\int_{\mathbb{R}^{2+}} \hat{h}^-(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} d\mathbf{k} \right] \quad (\text{A.1.6})$$

où \mathcal{Re} représente la partie réelle. Si maintenant la surface est figée, disons en $t = 0$ alors elle peut s'écrire :

$$h(\mathbf{r}) = 2\mathcal{Re} \int_{\mathbb{R}^{2+}} [\hat{h}^+(\mathbf{k}) + \hat{h}^-(\mathbf{k})] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad (\text{A.1.7})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2+}} [\hat{h}^+(\mathbf{k}) + \hat{h}^-(\mathbf{k})] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} + \int_{\mathbb{R}^{2+}} [\hat{h}^{+*}(\mathbf{k}) + \hat{h}^{-*}(\mathbf{k})] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad (\text{A.1.8})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2+}} [\hat{h}^+(\mathbf{k}) + \hat{h}^-(\mathbf{k})] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} + \int_{\mathbb{R}^{2-}} [\hat{h}^-(\mathbf{k}) + \hat{h}^+(\mathbf{k})] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad (\text{A.1.9})$$

La surface figée se met donc sous la forme :

$$h(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{h}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad (\text{A.1.10})$$

avec $\hat{h}(\mathbf{k}) = \hat{h}^+(\mathbf{k}) + \hat{h}^-(\mathbf{k})$

A.1.2 Corrélation de processus Gaussiens

Lorsque deux processus Gaussiens X et Y peuvent être écrits dans l'espace de Fourier :

$$\begin{cases} X(r) &= \int N_X(k) \hat{h}(k) e^{ikr} dk \\ Y(r') &= \int N_Y(k') \hat{h}(k') e^{ik'r'} dk' \end{cases} \quad (\text{A.1.11})$$

où N_x et N_y sont des noyaux déterministes dépendant de k , leur fonction de corrélation s'écrit :

$$\langle X(r) Y^*(r') \rangle = \iint N_X(k) N_Y^*(k') \langle \hat{h}(k) \hat{h}^*(k') \rangle e^{i(kr - k'r')} dk dk'. \quad (\text{A.1.12})$$

Or nous avons la propriété

$$\langle \hat{h}(k) \hat{h}^*(k') \rangle = \Gamma(k) \delta(k - k') \quad (\text{A.1.13})$$

où $\Gamma(k) = |\hat{h}(k)|^2$ et ainsi

$$\langle X(r) Y(r')^* \rangle = \int N_X(k) N_Y(k) \Gamma(k) e^{ik(r-r')} dk \quad (\text{A.1.14})$$

A.2 Propriétés générales

Dans de nombreuses parties de ce documents, le calcul de moyennes d'ensemble de fonction de processus Gaussien est souvent utilisé. La plupart sont sous la forme :

$$\langle (1 + X)(1 + Y)(1 + Z)(1 + T)e^{iH} \rangle \quad (\text{A.2.15})$$

où X, Y, Z, T et H sont cinq processus Gaussiens aléatoires et centrés.

Notons en premier lieu que pour un processus Gaussien centré X nous avons la propriété remarquable (*Papoulis* [1965]) :

$$\langle e^{iX} \rangle = e^{-1/2 \langle |X|^2 \rangle}. \quad (\text{A.2.16})$$

Notons également pour des processus réels :

$$\begin{aligned}
\langle (1+X)e^{iH} \rangle &= \langle e^{iH} \rangle + \langle Xe^{iH} \rangle \\
&= e^{-1/2\langle H^2 \rangle} - i \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \langle e^{i(H+\alpha X)} \rangle \right\} \Big|_{\alpha=0} \\
&= e^{-1/2\langle H^2 \rangle} - i \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \langle e^{-1/2(\langle H^2 \rangle + 2\alpha\langle XH \rangle + \alpha^2\langle X^2 \rangle)} \rangle \right\} \Big|_{\alpha=0} \\
&= e^{-1/2\langle H^2 \rangle} - i \langle -XH \rangle e^{-1/2\langle H^2 \rangle} \\
&= (1 + i\langle XH \rangle) e^{-1/2\langle H^2 \rangle}
\end{aligned} \tag{A.2.17}$$

De même

$$\begin{aligned}
\langle (1+Y)(1+X)e^{iH} \rangle &= \langle (1+X)e^{iH} \rangle + \langle Y(1+X)e^{iH} \rangle \\
&= \langle (1+X)e^{iH} \rangle - i \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \langle (1+X)e^{i(H+\alpha Y)} \rangle \right\} \Big|_{\alpha=0}
\end{aligned} \tag{A.2.18}$$

Or $H + \alpha Y$ est de nouveau un processus aléatoire Gaussien et centré. En remplaçant H par $H + \alpha Y$ dans le premier résultat on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle (1+Y)(1+X)e^{iH} \rangle &= (1 + i\langle XH \rangle) e^{-1/2\langle H^2 \rangle} \\
&\quad - i \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ (1 + i\langle X(H + \alpha Y) \rangle) e^{-1/2\langle (H + \alpha Y)^2 \rangle} \right\} \Big|_{\alpha=0} \\
&= (1 + i\langle XH \rangle) e^{-1/2\langle H^2 \rangle} \\
&\quad - i(i\langle XY \rangle + (1 + i\langle XH \rangle)\langle -YH \rangle) e^{-1/2\langle H^2 \rangle} \\
&= (\langle XY \rangle + (1 + i\langle XH \rangle)(1 + i\langle YH \rangle)) e^{-1/2\langle H^2 \rangle}
\end{aligned} \tag{A.2.19}$$

En réitérant le processus deux fois on obtient :

$$\begin{aligned}
&\langle (1+T)(1+Z)(1+Y)(1+X)e^{iH} \rangle = \tag{A.2.20} \\
&e^{-1/2\langle H^2 \rangle} \left[\begin{array}{l} \langle XY \rangle \langle ZT \rangle + \langle XT \rangle (1 + i\langle YH \rangle)(1 + i\langle ZH \rangle) \\ \langle XZ \rangle \langle YT \rangle + \langle YT \rangle (1 + i\langle XH \rangle)(1 + i\langle ZH \rangle) \\ \langle YZ \rangle \langle XT \rangle + \langle ZT \rangle (1 + i\langle YH \rangle)(1 + i\langle XH \rangle) \\ \quad + \langle XY \rangle (1 + i\langle ZH \rangle)(1 + i\langle TH \rangle) \\ \quad + \langle XZ \rangle (1 + i\langle YH \rangle)(1 + i\langle TH \rangle) \\ \quad + \langle YZ \rangle (1 + i\langle XH \rangle)(1 + i\langle TH \rangle) \\ \quad + (1 + i\langle XH \rangle)(1 + i\langle YH \rangle)(1 + i\langle ZH \rangle)(1 + i\langle TH \rangle) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Annexe B

Calculs statistiques des processus non Gaussiens

Sommaire

B.1 Moments des élévations. Cas 2D	99
B.2 Pdf des élévations. Cas 2D	100
B.3 Pdf des pentes. Cas 2D	100
B.4 Pdf des courbures. Cas 2D	102
B.5 Moments des élévations. Cas 3D	103
B.6 Pdf des élévations. Cas 3D	104

B.1 Moments des élévations. Cas 2D

Il est possible d'obtenir tout les moments d'un processus en connaissant sa fonction caractéristique. Celle de la surface non linéaire \tilde{h} est définie par :

$$\tilde{\Phi}(u) = \langle e^{iu\tilde{h}} \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \langle e^{iu\tilde{h}(x)} \rangle dx \quad (\text{B.1.1})$$

Le changement de variable $x \rightarrow x + D(x)$ permet de nous ramener à :

$$\langle e^{iu\tilde{h}} \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \langle e^{iu h(x)} (1 + D'(x)) \rangle dx, \quad (\text{B.1.2})$$

et comme h et D sont deux processus Gaussiens centrés, on a d'après A.2.17 :

$$\langle (1 + D'(x)) e^{iu h(x)} \rangle = (1 + iu \langle D'(x) h(x) \rangle) \exp \left(-\frac{1}{2} \langle |u h(x)|^2 \rangle \right)$$

En utilisant le fait que $\langle h^2(x) \rangle = \sigma_0^2$ et $\langle h(x) D'(x) \rangle = -\sigma_1^2$ on obtient alors aisément :

$$\langle (1 + D'(x)) e^{iu h(x)} \rangle = (1 - iu \sigma_1^2) e^{-\frac{1}{2} u^2 \sigma_0^2} \quad (\text{B.1.3})$$

soit

$$\tilde{\Phi}(u) = (1 - iu \sigma_1^2) e^{-\frac{1}{2} u^2 \sigma_0^2}. \quad (\text{B.1.4})$$

Nous pouvons donc dériver tous les moments de \tilde{h} en écrivant :

$$\langle \tilde{h}^n \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \tilde{\Phi}(u) \Big|_{u=0} \quad (\text{B.1.5})$$

En notant que

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} u(x)v(x) = \sum_{p=0}^n C_n^p u^{(p)} v^{(n-p)}, \quad (\text{B.1.6})$$

on a pour $n \geq 1$

$$\frac{\partial^n}{\partial u^n} \tilde{\Phi}(u) = (1 - iu\sigma_1^2) \frac{\partial^n}{\partial u^n} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\sigma_0^2\right) \right] - ni\sigma_1^2 \frac{\partial^{n-1}}{\partial u^{n-1}} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\sigma_0^2\right) \right] \quad (\text{B.1.7})$$

On a de plus avec les polynômes d'Hermite sous forme probabiliste :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2/2} \quad (\text{B.1.8})$$

Soit

$$\frac{\partial^n}{\partial u^n} e^{-u^2\sigma_0^2/2} = (-1)^n e^{-u^2/2} \sigma_0^n H_n(u\sigma_0). \quad (\text{B.1.9})$$

D'où finalement

$$\langle \tilde{h}^n \rangle = i^n \sigma_0^{n-1} \left(\sqrt{\sigma_0^2} H_n(0) + in\sigma_1^2 H_{n-1}(0) \right) \quad (\text{B.1.10})$$

Ce qui nous donne pour les premiers moments :

$$\langle \tilde{h} \rangle = -\sigma_1^2, \quad \langle \tilde{h}^2 \rangle = \sigma_0^2, \quad \langle \tilde{h}^3 \rangle = -3\sigma_0^2\sigma_1^2. \quad (\text{B.1.11})$$

B.2 Pdf des élévations. Cas 2D

La fonction de densité de probabilité s'écrit comme la transformée de Fourier (TF) de la fonction caractéristique. Pour les élévations z du processus \tilde{h} nous avons la pdf $\tilde{P}_0(z)$ qui s'écrit donc

$$\tilde{P}_0(z) = TF[\tilde{\Phi}(u)](z) \quad (\text{B.2.12})$$

et comme

$$TF \left[e^{-\frac{1}{2}u^2\sigma_0^2} \right] (p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (\text{B.2.13})$$

$$TF \left[-u\sigma_0^2 e^{-\frac{1}{2}u^2\sigma_0^2} \right] (p) = ip \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma_0^2}\right) \quad (\text{B.2.14})$$

nous pouvons écrire la pdf des élévations z de \tilde{h} en fonction des moments du spectre :

$$\tilde{P}_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-z^2/2\sigma_0^2} \left(1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} z \right) \quad (\text{B.2.15})$$

B.3 Pdf des pentes. Cas 2D

Le calcul de la pdf des pentes du processus nonlinéaire $\tilde{P}_2(z)$ est plus délicat mais s'articule autour de la même technique que celle des élévations. Pour cela nous remarquons que

$$\tilde{h}(x + D(x)) = h(x) \quad (\text{B.3.16})$$

$$\tilde{h}'(x + D(x)) = \frac{h'(x)}{1 + D'(x)} \quad (\text{B.3.17})$$

et nous nous intéressons de nouveau à la fonction caractéristique

$$\tilde{\xi}(v) = \left\langle e^{iv\tilde{h}'} \right\rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left\langle e^{iv \frac{h'(x)}{1+D'(x)} (1+D'(x))} \right\rangle dx \quad (\text{B.3.18})$$

En posant $x_2 = D'(x)$ et $x_1 = h'(x)$ la pdf des pentes s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2(z) &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{\xi}(v) e^{-ivz} dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \iint (1+x_2) e^{iv \frac{x_1}{1+x_2}} P_2(x_1) P_2(x_2) dx_1 dx_2 e^{-ivz} dv \end{aligned} \quad (\text{B.3.19})$$

où P_2 est la distribution des variables Gaussiennes x_1 et x_2 de variance σ_2^2 .

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2(z) &= \frac{1}{2\pi} \iint \underbrace{\int e^{-iv \left(z - \frac{x_1}{1+x_2} \right)} dv}_{2\pi \delta \left(z - \frac{x_1}{1+x_2} \right)} (1+x_2) P_2(x_1) P_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \iint \delta \left(z - \frac{x_1}{1+x_2} \right) (1+x_2) P_2(x_1) P_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \iint |1+x_2| \delta(z(1+x_2) - x_1) (1+x_2) P_2(x_1) P_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int x |x| P(zx) P(x-1) dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_2^2} \left[\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} [(zx)^2 + (x-1)^2]} dx - \int_{-\infty}^0 x^2 e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} [(zx)^2 + (x-1)^2]} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_2^2} \left[\int_0^\infty x^2 e^{-px^2 + 2qx} dx - \int_{-\infty}^0 x^2 e^{-px^2 + 2qx} dx \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3.20})$$

avec $p = \frac{z^2 + 1}{2\sigma_2^2}$ et $q = \frac{1}{2\sigma_2^2}$. Or nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 e^{-px^2 + 2qx} dx &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \frac{\partial}{\partial q} \left[\left(\frac{2q}{p} \text{Erfc}(-q/\sqrt{p}) + \frac{2}{\sqrt{\pi p}} e^{-q^2/p} \right) e^{q^2/p} \right] \\ &= \frac{1}{4p} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(1 + \frac{2q^2}{p} \right) \text{Erfc}(-q/\sqrt{p}) e^{q^2/p} + \frac{q}{2p^2} \\ &= f(p, q) \end{aligned} \quad (\text{B.3.21})$$

Finalement

$$\tilde{P}_2(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_2^2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_2^2} \right) [f(p, q) - f(p, -q)] \quad (\text{B.3.22})$$

et en notant que $\text{Erfc}(-x) - \text{Erfc}(x) = 2\text{Erf}(x)$ la pdf des pentes peut se réécrire en arrangeant les termes :

$$\tilde{P}_2(z) = \frac{\sigma_2^2(1+z^2)+1}{(1+z^2)^{5/2}} \text{Erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma_2^2(1+z^2)}} \right) P_2 \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right) + \frac{e^{-1/2\sigma_2^2}}{\pi(1+z^2)^2} \quad (\text{B.3.23})$$

B.4 Pdf des courbures. Cas 2D

De même que pour les pentes, nous calculons ici la pdf des courbures. Dans les modèles de diffusion, il est de grande importance de prendre en compte la courbure. Or si dans ce mémoire nous n'avons pas implémenté de méthode la prenant en compte, nous pouvons toujours estimer son augmentation par rapport au cas Gaussien afin d'estimer son effet sur d'autre modèle de diffusion la prenant en compte.

On a facilement

$$\tilde{h}'(x + D(x)) = \frac{h'(x)}{1 + D'(x)} \quad (\text{B.4.24})$$

$$\tilde{h}''(x + D(x)) = \frac{h''(x)(1 + D'(x)) - h'(x)D''(x)}{(1 + D'(x))^3} \quad (\text{B.4.25})$$

Le même calcul de fonction caractéristique pour la courbure nous donne

$$\tilde{\chi}(v) = \left\langle e^{iv\tilde{h}''(x)} \right\rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left\langle (1 + D'(x)) e^{iv \frac{h''(x)(1 + D'(x)) - h'(x)D''(x)}{(1 + D'(x))^3}} \right\rangle dx$$

En notant $X_1 = h'$, $X_3 = D'$, $X_2 = h''$ et $X_4 = D''$ il vient

$$\begin{aligned} \langle X_1 X_2 \rangle &= 0 & \langle X_1^2 \rangle &= \sigma_2^2 \\ \langle X_1 X_3 \rangle &= 0 & \langle X_2^2 \rangle &= \sigma_4^2 \\ \langle X_1 X_4 \rangle &= -\sigma_3^2 & \langle X_3^2 \rangle &= \sigma_2^2 \\ \langle X_2 X_3 \rangle &= +\sigma_3^2 & \langle X_4^2 \rangle &= \sigma_4^2 \\ \langle X_2 X_4 \rangle &= 0 \\ \langle X_3 X_4 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.4.26})$$

La matrice de corrélation de toutes ces variables gaussiennes centrées peut se mettre sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_3^2 & 0 & 0 \\ -\sigma_3^2 & \sigma_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & \sigma_4^2 \end{pmatrix} \text{ avec la base : } X_1 \quad X_4 \quad X_3 \quad X_2$$

et il vient :

$$\tilde{\chi}(v) = \left\langle (1 + D'(x)) e^{iv \frac{h''(x)(1 + D'(x)) - h'(x)D''(x)}{(1 + D'(x))^3}} \right\rangle \quad (\text{B.4.27})$$

$$= \int (1 + X_3) e^{iv \frac{X_2(1 + X_3) - X_1 X_4}{(1 + X_3)^3}} P(X_1, X_4) P'(X_3, X_2) dX_i \quad (\text{B.4.28})$$

où

$$P(\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|N|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{X}N^{-1}\mathbf{X}\right) \quad \text{avec } |N| = \sigma_2^2\sigma_4^2 - \sigma_3^4 \quad (\text{B.4.29})$$

$$P'(\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|N'|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{X}N'^{-1}\mathbf{X}\right) \quad \text{avec } |N'| = \sigma_2^2\sigma_4^2 - \sigma_3^4 \quad (\text{B.4.30})$$

Et

$$N^{-1} = \frac{1}{\sigma_2^2 \sigma_4^2 - \sigma_3^4} \begin{pmatrix} \sigma_4^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_3^2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$N'^{-1} = \frac{1}{\sigma_2^2 \sigma_4^2 - \sigma_3^4} \begin{pmatrix} \sigma_4^2 & -\sigma_3^2 \\ -\sigma_3^2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la pdf des courbures, je fais donc la TF en v de la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_4(z) &= \frac{1}{2\pi} \int \tilde{\chi}(v) e^{-izv} dv \\ &= \int \delta \left(z - \frac{X_2(1+X_3) - X_1X_4}{(1+X_3)^3} \right) (1+X_3) P(X_1, X_4) P'(X_3, X_2) dX_i \\ &= \int \delta \left(\frac{1}{(1+X_3)^2} \left(\frac{z(1+X_3)^3 + X_1X_4}{(1+X_3)} - X_2 \right) \right) (1+X_3) P(X_1, X_4) P'(X_3, X_2) dX_i \\ &= \int \delta \left(\frac{z(1+X_3)^3 + X_1X_4}{(1+X_3)} - X_2 \right) (1+X_3)^3 P(X_1, X_4) P'(X_3, X_2) dX_i \\ &= \iiint (1+X_3)^3 P(X_1, X_4) P' \left(X_3, \frac{z(1+X_3)^3 + X_1X_4}{(1+X_3)} \right) dX_1 dX_3 dX_4 \end{aligned} \quad (\text{B.4.31})$$

Afin de simplifier encore cette expression nous réalisons l'intégration analytique en X_1 .

Je note $H_{ij} = \frac{1}{2} N_{ij}^{-1}$. Le développement des termes en X_1 dans les exponentielles des Gaussiennes s'écrivent :

$$-X_1^2 \left(H_{11} + \frac{X_4^2}{(1+X_3)^2} H_{22} \right) - X_1 \left(2H_{12}X_4 + 2H_{22}zX_4(1+X_3)^2 - 2H_{12} \frac{X_3X_4}{1+X_3} \right) \quad (\text{B.4.32})$$

Or

$$\int e^{-ax^2-bx} dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2} = e^{\frac{b^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{B.4.33})$$

et il vient donc

$$\tilde{P}_4(z) = \frac{1}{4\pi^2 |N|} \iint (1+X_3)^3 e^{\frac{b^2}{4a}-c} \sqrt{\frac{\pi}{a}} dX_3 dX_4 \quad (\text{B.4.34})$$

avec

$$\begin{cases} a &= H_{11} + \frac{X_4^2}{(1+X_3)^2} H_{22} \\ b &= 2H_{12}X_4 + 2H_{22}zX_4(1+X_3)^2 - 2H_{12} \frac{X_3X_4}{1+X_3} \\ c &= H_{22}X_4^2 + H_{11}X_3^2 + H_{22}z^2(1+X_3)^4 - 2H_{12}X_3z(1+X_3)^2 \end{cases}$$

B.5 Moments des élévations. Cas 3D

De même qu'en dimension deux, le changement de variable $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r})$ permet de nous ramener à :

$$\langle e^{iu\tilde{h}} \rangle = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \int_A \langle e^{iu h(\mathbf{r})} J(\mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r}, \quad (\text{B.5.35})$$

où J est le Jacobien de la transformation : $(1 + \partial_x D_x)(1 + \partial_y D_y) - \partial_x D_y \partial_y D_x$.

D'après (A.2.17) et quelques opérations, on arrive à :

$$\tilde{\Phi}(u) = \left(1 - iu\sigma_1^2 + u^2\Sigma_1 \right) \exp \left(-\frac{1}{2}u^2\sigma_0^2 \right) \quad (\text{B.5.36})$$

où $\Sigma_1 = \sigma_{111}^4 - \sigma_{201}^2 \sigma_{021}^2$ et les moments absolus partiels et totaux du spectres sont définis équation (2.2.20).

On a pour $n > 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \tilde{\Phi}(u) &= (1 - iu\sigma_1^2 + u^2\Sigma_1) \frac{\partial^n}{\partial u^n} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\sigma_0^2\right) \right] \\ &\quad + n(-i\sigma_1^2 + 2u\Sigma_1) \frac{\partial^{n-1}}{\partial u^{n-1}} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\sigma_0^2\right) \right] \\ &\quad + n(n-1)\Sigma_1^2 \frac{\partial^{n-2}}{\partial u^{n-2}} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\sigma_0^2\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.5.37})$$

D'ou finalement pour $n \geq 2$.

$$\langle \tilde{h}^n \rangle = i^n \sigma_0^{n-2} \left(\sigma_0^2 H_n(0) + in\sigma_1^2 \sigma_0 H_{n-1}(0) + n(n-1)\Sigma_1 H_{n-2}(0) \right) \quad (\text{B.5.38})$$

Les premiers moments s'écrivent

$$\begin{aligned} \langle \tilde{h} \rangle &= -\sigma_1^2, & \langle \tilde{h}^3 \rangle &= -3\sigma_0^2 \sigma_1^2 \\ \langle \tilde{h}^2 \rangle &= \sigma_0^2 - 2\Sigma_1, & \langle \tilde{h}^4 \rangle &= 3\sigma_0^4 \left(1 - 4\frac{\Sigma_1}{\sigma_0^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.5.39})$$

B.6 Pdf des élévations. Cas 3D

Comme en dimension deux, la fonction de densité de probabilité s'écrit comme la transformée de Fourier (TF) de la fonction caractéristique. Pour les élévations z du processus \tilde{h} nous avons la pdf $\tilde{P}_0(z)$ qui s'écrit donc

$$\tilde{P}_0(z) = TF[\tilde{\Phi}(u)](z) \quad (\text{B.6.40})$$

et en rajoutant à (B.2.13) et (B.2.14) que

$$TF \left[(-\sigma_0^2 + u^2\sigma_0^4) \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\sigma_0^2\right) \right] = -p^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{\frac{-p^2}{2\sigma_0^2}} \quad (\text{B.6.41})$$

nous pouvons écrire la pdf des élévations de \tilde{h} en fonction des moments du spectre :

$$\tilde{P}_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-z^2/2\sigma_0^2} \left[1 + \frac{\Sigma_1}{\sigma_0^2} - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} z - \frac{\Sigma_1^2}{\sigma_0^4} z^2 \right] \quad (\text{B.6.42})$$

Annexe C

Développements

Sommaire

C.1 Fonctions de corrélation et dérivées	105
C.2 Développement d'optique physique	107

C.1 Fonctions de corrélation et dérivées

Le calcul du spectre habillé ou de la NRCS dans le cas non Gaussien nécessite l'évaluation de la fonction de corrélation C ainsi que de ses dérivées $\mathbf{u} \cdot \nabla C$, ΔC , $\Phi_{\mathbf{u}}$, S_1 (Cf. équation (3.1.6)). Afin de simplifier les calculs numériques il est possible de simplifier leurs expressions en les développant selon des coordonnées polaires.

Rappelons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n(\phi - \eta)) \cos(z \cos(\phi - \theta)) d\phi &= \begin{cases} (-1)^p 2\pi J_{2p}(z) \cos(2p(\theta - \eta)) & \text{si } n=2p \\ 0 & \text{si } n=2p+1 \end{cases} , \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n(\phi - \eta)) \cos(z \cos(\phi - \theta)) d\phi &= \begin{cases} (-1)^p 2\pi J_{2p}(z) \sin(2p(\theta - \eta)) & \text{si } n=2p \\ 0 & \text{si } n=2p+1 \end{cases} , \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n(\phi - \eta)) \sin(z \cos(\phi - \theta)) d\phi &= \begin{cases} 0 & \text{si } n=2p \\ (-1)^p 2\pi J_{2p+1}(z) \cos((2p+1)(\theta - \eta)) & \text{si } n=2p+1 \end{cases} , \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n(\phi - \eta)) \sin(z \cos(\phi - \theta)) d\phi &= \begin{cases} 0 & \text{si } n=2p \\ (-1)^p 2\pi J_{2p+1}(z) \sin((2p+1)(\theta - \eta)) & \text{si } n=2p+1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Je note dans la suite :

$$\begin{cases} \alpha : & \text{angle de } \mathbf{u} \\ \phi : & \text{angle de } \mathbf{k} \\ \theta : & \text{angle de } \mathbf{r} \end{cases} \quad \text{par rapport à la direction du vent} \quad (\text{C.1.1})$$

et

$$\mathcal{B}[f; n](r) = 2\pi \int_0^{\infty} f(k) J_n(kr) k dk. \quad (\text{C.1.2})$$

En décomposant le spectre sous la forme :

$$\Gamma(\mathbf{k}) = \Gamma_0(k) + \Gamma_2(k) \cos(2\phi) \quad (\text{C.1.3})$$

où $\Gamma_0(k) = B(k)k^{-4}/2\pi$ et $\Gamma_2(k) = B(k)\Delta(k)k^{-4}/2\pi$, il vient :

$$\begin{aligned}
 C(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \\
 &= \int_0^{+\infty} \Gamma_0(k) k dk \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\phi-\theta)} d\phi + \int_0^{+\infty} \Gamma_2(k) k dk \int_0^{2\pi} \cos(2\phi) e^{ikr \cos(\phi-\theta)} d\phi \\
 &= B[\Gamma_0; 0] - B[\Gamma_2; 2] \cos(2\theta)
 \end{aligned} \tag{C.1.4}$$

$$\begin{aligned}
 C_1(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^2} k\Gamma(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \\
 &= \int_0^{+\infty} k\Gamma_0(k) k dk \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\phi-\theta)} d\phi + \int_0^{+\infty} k\Gamma_2(k) k dk \int_0^{2\pi} \cos(2\phi) e^{ikr \cos(\phi-\theta)} d\phi \\
 &= B[k\Gamma_0; 0] - B[k\Gamma_2; 2] \cos(2\theta)
 \end{aligned} \tag{C.1.5}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^2} -k^2\Gamma(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \\
 &= \int_0^{+\infty} -k^2\Gamma_0(k) k dk \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\phi-\theta)} d\phi - \int_0^{+\infty} k^2\Gamma_2(k) k dk \int_0^{2\pi} \cos(2\phi) e^{ikr \cos(\phi-\theta)} d\phi \\
 &= -B[k^2\Gamma_0; 0] + B[k^2\Gamma_2; 2] \cos(2\theta)
 \end{aligned} \tag{C.1.6}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{C}(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^2} i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} \Gamma(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \\
 &= i|\mathbf{u}| \int_0^{+\infty} k\Gamma_0(k) k dk \int_0^{2\pi} \cos(\phi - \alpha) e^{ikr \cos(\phi-\theta)} d\phi \\
 &\quad + i|\mathbf{u}| \int_0^{+\infty} k\Gamma_2(k) k dk \int_0^{2\pi} \cos(\phi - \alpha) \cos(2\phi) e^{ikr \cos(\phi-\theta)} d\phi
 \end{aligned}$$

Or $\cos(2\phi) \cos(\phi - \alpha) = 1/2(\cos(\phi + \alpha) + \cos(3\phi - \alpha))$ et il vient donc :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{C}(\mathbf{r}) &= i|\mathbf{u}| \int_0^{+\infty} k\Gamma_0(k) k dk [2i\pi J_1(kr) \cos(\theta - \alpha)] \\
 &\quad + i\frac{|\mathbf{u}|}{2} \int_0^{+\infty} k\Gamma_2(k) k dk [2i\pi (J_1(kr) \cos(\theta + \alpha) - J_3(kr) \cos(3\theta - \alpha))] \\
 &= -|\mathbf{u}| B[k\Gamma_0; 1] \cos(\theta - \alpha) - \frac{|\mathbf{u}|}{2} (B[k\Gamma_2; 1] \cos(\theta + \alpha) - B[k\Gamma_2; 3] \cos(3\theta - \alpha)) \\
 &= -|\mathbf{u}| B[k\Gamma_0; 1] \cos(\theta - \alpha) - \frac{|\mathbf{u}|}{2} \left[(B[k\Gamma_2; 1] - B[k\Gamma_2; 3]) \cos(2\theta) \cos(\theta - \alpha) \right. \\
 &\quad \left. + (B[k\Gamma_2; 1] + B[k\Gamma_2; 3]) \sin(2\theta) \sin(\theta - \alpha) \right]
 \end{aligned} \tag{C.1.7}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^2} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \Gamma(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Gamma_0(k) k dk \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\phi - 2\alpha)) e^{ikr \cos(\phi-\theta)} d\phi \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Gamma_2(k) k dk \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\phi - 2\alpha)) \cos(2\phi) e^{ikr \cos(\phi-\theta)} d\phi
 \end{aligned}$$

Or $\cos(2\phi) \cos(2\phi - 2\alpha) = 1/2(\cos(2\alpha) + \cos(4\phi - 2\alpha))$ et il vient donc :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Gamma_0(k) k \, dk \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\phi - 2\alpha)) e^{ikr \cos(\phi - \theta)} d\phi \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} k \Gamma_2(k) k \, dk \int_0^{2\pi} (\cos(2\alpha) + \cos(4\phi - 2\alpha)) e^{ikr \cos(\phi - \theta)} d\phi \\
&= \frac{1}{2} \left[B[\Gamma_0; 0] - B[\Gamma_0; 2] \cos(2(\theta - \alpha)) - B[\Gamma_2; 2] \cos(2\theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (B[\Gamma_2; 0] \cos(2\alpha) + B[\Gamma_2; 4] \cos(4\theta - 2\alpha)) \right] \\
&= \frac{1}{2} (\mathcal{B}[\Gamma_0; 0] - \mathcal{B}[\Gamma_0; 2]) \cos^2(\theta - \alpha) + \frac{1}{2} (\mathcal{B}[\Gamma_0; 0] + \mathcal{B}[\Gamma_0; 2]) \sin^2(\theta - \alpha) \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathcal{B}[\Gamma_2; 2] \cos(2\theta) + \frac{1}{4} (\mathcal{B}[\Gamma_2; 0] + \mathcal{B}[\Gamma_2; 4]) \cos(2\theta - 2\alpha) \cos(2\theta) \\
&\quad + \frac{1}{4} (\mathcal{B}[\Gamma_2; 0] - \mathcal{B}[\Gamma_2; 4]) \sin(2\theta - 2\alpha) \sin(2\theta) \tag{C.1.8}
\end{aligned}$$

C.2 Développement d'optique physique

En supposant la correction en courbure faible le développement haute-fréquence de l'intégrale de Kirchhoff s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{Q}) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{iQ_{Hx}x} e^{iQ_{Hy}y} e^{-Q_z^2 x^2 \sigma_{2x}^2 / 2} e^{-Q_z^2 y^2 \sigma_{2y}^2 / 2} \times \\
&\quad \left[1 + \frac{Q_z^2 x^4}{24} \sigma_{4x}^2 + \frac{Q_z^2 y^4}{24} \sigma_{4y}^2 + \frac{Q_z^2 x^2 y^2}{24} (\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2) \right] dx dy \tag{C.2.9}
\end{aligned}$$

où Q_{Hx} et Q_{Hy} sont respectivement les projections du vecteur \mathbf{Q}_H dans les directions upwind et crosswind.

L'intégration en x nous donne :

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{Q}) &= 2\pi \left[P_x \left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z} \right) \left(1 + \frac{Q_z^2 y^4}{24} \sigma_{4y}^2 \right) - \frac{Q_z^2 y^2}{24} (\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2) \frac{\partial^2}{\partial Q_{Hx}^2} P_x \left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{Q_z^2}{24} \sigma_{4x}^2 \frac{\partial^4}{\partial Q_{Hx}^4} P_x \left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z} \right) \right] \tag{C.2.10}
\end{aligned}$$

où P_x est la Gaussienne de variance σ_{2x}^2 (avec Q_z au dénominateur) :

$$P_x \left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Q_z^2 \sigma_x^2}} \exp \left(-\frac{Q_{Hx}^2}{Q_z^2 \sigma_{2x}^2} \right) \tag{C.2.11}$$

L'intégration en y donne :

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{Q}) &= 4\pi^2 \left\{ P_y \left(\frac{Q_{Hy}}{Q_z} \right) \left[1 + \frac{Q_z^2}{24} \sigma_{4x}^2 \frac{\partial^4}{\partial Q_{Hx}^4} \right] P_x \left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z} \right) + \right. \\
&\quad \frac{Q_z^2}{24} (\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2) \frac{\partial^2}{\partial Q_{Hx}^2} \left[P_x \left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z} \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial Q_{Hy}^2} \left[P_y \left(\frac{Q_{Hy}}{Q_z} \right) \right] + \\
&\quad \left. \frac{Q_z^2}{24} \sigma_{4y}^2 P_x \left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z} \right) \frac{\partial^4}{\partial Q_{Hy}^4} \left[P_y \left(\frac{Q_{Hy}}{Q_z} \right) \right] \right\}. \tag{C.2.12}
\end{aligned}$$

Les polynomes d'Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} \quad (C.2.13)$$

permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{Q}) = & \frac{2\pi}{\sqrt{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2 Q_z^4}} \exp\left(-\frac{Q_{Hx}^2}{2\sigma_{2x}^2 Q_z^2} - \frac{Q_{Hy}^2}{2\sigma_{2y}^2 Q_z^2}\right) \times \left[1 + \right. \\ & \left. \frac{1}{24Q_z^2} \left(\frac{\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2}{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2} H_2\left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z \sigma_{2x}}\right) H_2\left(\frac{Q_{Hy}}{Q_z \sigma_{2y}}\right) + \frac{\sigma_{4x}^2}{\sigma_{2x}^4} H_4\left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z \sigma_{2x}}\right) + \frac{\sigma_{4y}^2}{\sigma_{2y}^4} H_4\left(\frac{Q_{Hy}}{Q_z \sigma_{2y}}\right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (C.2.14)$$

En configuration monostatique "back scattering" (angle d'incidence θ_0) et dans la direction upwind ($Q_{Hy} = 0$) il vient

$$\frac{1}{Q_z^2} = \frac{1 + \tan^2(\theta)}{4K^2} \quad (C.2.15)$$

$$\begin{aligned} H_4\left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z \sigma_{2x}}\right) &= \left(\frac{\tan(\theta_0)}{\sigma_{2x}}\right)^4 - 6\left(\frac{\tan(\theta_0)}{\sigma_{2x}}\right)^2 + 3, & H_4\left(\frac{Q_{Hy}}{Q_z \sigma_{2y}}\right) &= 3 \\ H_2\left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z \sigma_{2x}}\right) &= \left(\frac{\tan(\theta_0)}{\sigma_{2x}}\right)^2 - 1, & H_2\left(\frac{Q_{Hy}}{Q_z \sigma_{2y}}\right) &= -1 \end{aligned} \quad (C.2.16)$$

En négligeant les termes en $\tan^6(\theta_0)$ nous pouvons mettre la NRCS sous la forme :

$$\log\left(\frac{\cos^4(\theta_0) \Sigma^{(0)}(\theta_0)}{\Sigma^{(0)}(0)}\right) = A_{up} \tan^4(\theta_0) + B_{up} \tan^2(\theta_0) \quad (C.2.17)$$

avec

$$\begin{cases} A_{up} &= \frac{1}{\sigma_{2x}^2} \frac{1}{96K^2} \left(-\frac{\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2}{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2} + \frac{\sigma_{4x}^2}{\sigma_{2x}^6} (1 - 6\sigma_{2x}^2) \right) \\ B_{up} &= \frac{1}{\sigma_{2x}^2} \left[\frac{-1}{2} + \frac{1}{96K^2} \left(-\frac{\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2}{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2} (1 - \sigma_{2x}^2) + 3\frac{\sigma_{4x}^2}{\sigma_{2x}^2} (1 - 2\sigma_{2x}^2) + 3\frac{\sigma_{4y}^2}{\sigma_{2y}^2} \sigma_{2x}^2 \right) \right] \end{cases} \quad (C.2.18)$$

En ne gardant que les termes prépondérants, il vient :

$$\begin{cases} A_{up} &= \frac{1}{96K^2} \frac{\sigma_{4x}^2}{\sigma_{2x}^8} \\ B_{up} &= -\frac{1}{2\sigma_{2x}^2} \left[1 + \frac{1}{96K^2} \left(\frac{\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2}{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2} \right) \right] \end{cases} \quad (C.2.19)$$

Les coefficients A_{cross} et B_{cross} obtenus pour un éclairage transverse au vent s'obtiennent en échangeant les indices x et y dans les expressions ci-dessus.

Annexe D

Noyaux et coefficients de Fresnel

Sommaire

D.1 Noyaux	109
D.2 Coefficients de Fresnel	110

D.1 Noyaux

D.1.1 Noyau de Kirchhoff

Le noyau de Kirchhoff s'écrit :

$$\mathcal{K}_{ji} = \mathcal{R}_{ji}(Q/2)\mathcal{K}_{ji}^{\infty}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \quad (\text{D.1.1})$$

où $\mathcal{K}_{ji}^{\infty}$ est le noyau de Kirchhoff dans le cas parfaitement conducteur :

$$\mathcal{K}_{VV}^{\infty}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = -\mathcal{K}_{HH}^{\infty}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = (K^2 + q_k q_0) \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_0 - k k_0 \quad (\text{D.1.2})$$

$$\mathcal{K}_{VH}^{\infty}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = -\mathcal{K}_{HV}^{\infty}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = K(q_k + q_0) (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}_0) \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{D.1.3})$$

$$\text{et } \begin{cases} R_{VV}(q) &= \frac{\epsilon q_k - q'_k}{\epsilon q_k + q'_k} \\ R_{HH}(q) &= \frac{q_k - q'_k}{q_k + q'_k} \\ R_{VH}(q) &= R_{HV}(k) = \frac{R_{VV}(q) + R_{HH}(q)}{2} \end{cases} \quad (\text{D.1.4})$$

$Q = |\mathbf{K} - \mathbf{K}_0| = \sqrt{Q_H^2 + Q_z^2}$ et les variables primées sont :

$$q'_* = \sqrt{\epsilon K^2 - \mathbf{k}_* \cdot \mathbf{k}_*}. \quad (\text{D.1.5})$$

D.1.2 Noyau de Bragg

Le noyau de Bragg s'écrit selon les quatre polarisations :

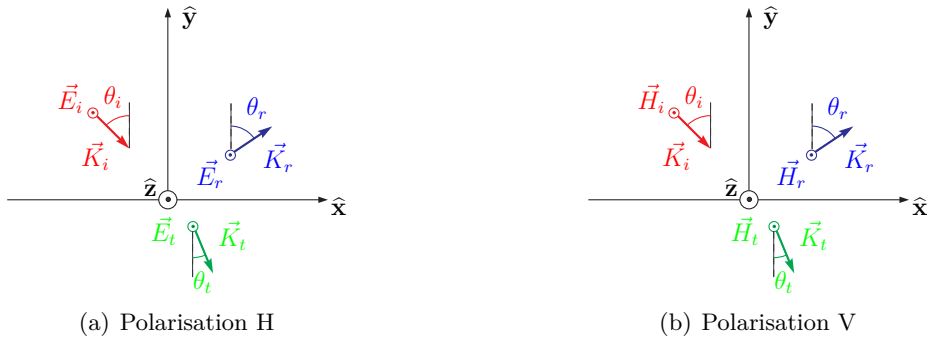
$$\begin{cases} \mathcal{B}_{VV}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) &= \frac{\epsilon - 1}{2} \left([1 - R_{\perp}(k)][1 - R_{\perp}(k_0)]q_k q_0 \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_0 - [1 + R_{\perp}(k)][1 + R_{\perp}(k_0)] \frac{k k_0}{\epsilon} \right) \\ \mathcal{B}_{VH}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) &= -\frac{\epsilon - 1}{2} K q_0 [1 + R_{\parallel}(k)][1 - R_{\perp}(k_0)] \hat{\mathbf{z}} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}_0) \\ \mathcal{B}_{HV}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) &= -\frac{\epsilon - 1}{2} K q_k [1 - R_{\perp}(k)][1 + R_{\parallel}(k_0)] \hat{\mathbf{z}} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}_0) \\ \mathcal{B}_{HH}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) &= -\frac{\epsilon - 1}{2} K^2 [1 + R_{\parallel}(k)][1 + R_{\parallel}(k_0)] \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}_0 \end{cases} \quad (\text{D.1.6})$$

$$\text{où} \begin{cases} R_{\perp}(k) &= \frac{\epsilon q_k - q'_k}{\epsilon q_k + q'_k} \\ R_{\parallel}(k) &= \frac{q_k - q'_k}{q_k + q'_k} \end{cases} \quad \text{avec} \quad q'_* = \sqrt{\epsilon K^2 - \mathbf{k}_* \cdot \mathbf{k}_*}. \quad (\text{D.1.7})$$

D.2 Coefficients de Fresnel

D.2.1 Dioptre

Le dioptre sépare l'air de permittivité relative $\epsilon_1 = 1$ d'une milieu semi infini de permittivité ϵ_2 . Nous rappelons sur les figures D.1(a) et D.1(b) les configurations des polarisations V et H.



Les trois champs électriques incident réfléchi et transmis normalisés en polarisation H s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_i &= e^{i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{E}_t &= t_H e^{i\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{R}} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{E}_r &= r_H e^{i\mathbf{K}_r \cdot \mathbf{R}} \hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad (\text{D.2.8})$$

où t_H et r_H sont respectivement les coefficient de transmission et de réflexion du dioptre pour le champ \mathbf{E} . La résolution des équations de continuité permet d'obtenir :

$$r_H = \frac{\beta_0 - \beta_2}{\beta_2 + \beta_0}, \quad t_H = \frac{2\beta_0}{\beta_2 + \beta_0} \quad (\text{D.2.9})$$

avec

$$\beta_0 = K_0 \cos(\theta_i) \quad \text{et} \quad \beta_2 = \sqrt{\epsilon_2 K_0^2 - \alpha_0} = \sqrt{\epsilon_2 K_0^2 - K_0^2 \sin^2(\theta_i)} \quad (\text{D.2.10})$$

Ils s'écrivent aussi :

$$r_H = \frac{\cos(\theta_i) - \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2(\theta_i)}}{\cos(\theta_i) + \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2(\theta_i)}}, \quad t_H = \frac{2 \cos(\theta_i)}{\cos(\theta_i) + \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2(\theta_i)}} \quad (\text{D.2.11})$$

Les trois champs magnétiques incident réfléchi et transmis normalisés en polarisation V s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_i &= e^{i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{H}_t &= t_V e^{i\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{R}} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{H}_r &= r_V e^{i\mathbf{K}_r \cdot \mathbf{R}} \hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad (\text{D.2.12})$$

où

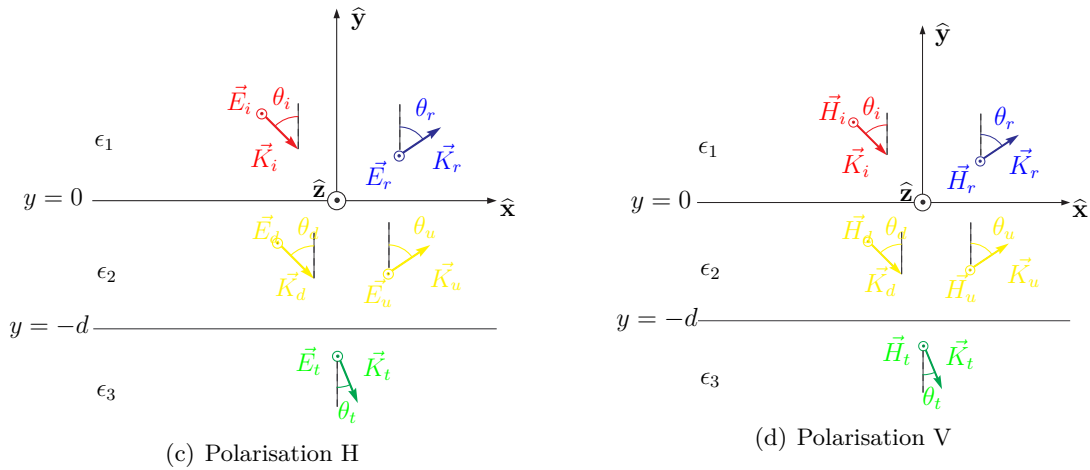
$$r_V = \frac{\epsilon_2 \beta_0 - \epsilon_1 \beta_2}{\epsilon_1 \beta_2 + \epsilon_2 \beta_0}, \quad t_V = \frac{2 \epsilon_2 \beta_0}{\epsilon_1 \beta_2 + \epsilon_2 \beta_0} \quad (\text{D.2.13})$$

avec

$$\beta_0 = K_0 \cos(\theta_i) \quad \text{et} \quad \beta_2 = \sqrt{\epsilon_2 K_0^2 - \alpha_0} = \sqrt{\epsilon_2 K_0^2 - K_0^2 \sin^2(\theta_i)} \quad (\text{D.2.14})$$

D.2.2 Bi-couche

Le bi-couche et les champs électriques et magnétiques des polarisations V et H sont représentés sur les figures ci-dessous. Les permittivités relatives complexes des trois milieux sont reportées sur le dessin.



Les trois champs électriques s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r &= (e^{i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}} + r e^{i\mathbf{K}_r \cdot \mathbf{R}}) \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{E}_m &= (D e^{i\mathbf{K}_d \cdot \mathbf{R}} + U e^{i\mathbf{K}_u \cdot \mathbf{R}}) \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{E}_t &= t e^{i\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{R}} \hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad (\text{D.2.15})$$

où U et D se rapporte aux ondes montantes (“Up-going”) et descendantes (“Down-going”) dans le milieu 2. Les vecteurs d'onde se décomposent sous la forme $\mathbf{K}_* = \alpha_* \hat{\mathbf{x}} \pm \beta_* \hat{\mathbf{y}}$ où β_* peut être complexe si le milieu considéré est absorbant.

La résolution des équations de continuité permettent d'écrire pour le champ électrique en polarisation H :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_H = \frac{r_{12_H} + r_{23_H} e^{2i\beta_2 d}}{1 + r_{12_H} r_{23_H} e^{2i\beta_2 d}} \\ U_H = \frac{t_{12_H} r_{23_H} e^{2i\beta_2 d}}{1 + r_{12_H} r_{23_H} e^{2i\beta_2 d}} \\ D_H = \frac{t_{12_H}}{1 + r_{12_H} r_{23_H} e^{2i\beta_2 d}} \\ t_H = \frac{t_{12_H} t_{23_H} e^{i(\beta_2 - \beta_3) d}}{1 + r_{12_H} r_{23_H} e^{2i\beta_2 d}} \end{array} \right. \quad (D.2.16)$$

où les r_{ij_H} et t_{ij_H} sont respectivement les coefficients de reflexion et de transmission du champ électrique entre les milieux i et j avec

$$\beta_2 = \sqrt{\epsilon_2 K_0^2 - K_0^2 \sin^2(\theta_i)} \quad (D.2.17)$$

$$\beta_3 = \sqrt{\epsilon_3 K_0^2 - K_0^2 \sin^2(\theta_i)} \quad (D.2.18)$$

Les expressions de ces coefficients se trouvent en première section de cette annexe.

En polarisation V, les coefficients précédents deviennent pour le champ magnétique :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_V = \frac{r_{12_V} + r_{23_V} e^{2i\beta_2 d}}{1 + r_{12_V} r_{23_V} e^{2i\beta_2 d}} \\ U_V = \frac{t_{12_V} r_{23_V} e^{2i\beta_2 d}}{1 + r_{12_V} r_{23_V} e^{2i\beta_2 d}} \\ D_V = \frac{t_{12_V}}{1 + r_{12_V} r_{23_V} e^{2i\beta_2 d}} \\ t_V = \frac{t_{12_V} t_{23_V} e^{i(\beta_2 - \beta_3) d}}{1 + r_{12_V} r_{23_V} e^{2i\beta_2 d}} \end{array} \right. \quad (D.2.19)$$

Notons tout de même que si la couche est considérée non pas entre $y = -d$ et $y = 0$ mais entre $y = 0$ et $y = d$ alors les coefficients sont déphasés et deviennent pour le champ électrique en polarisation H :

$$\left\{ \begin{array}{l} r'_H = r_H e^{-2i\beta_1 d} \\ U'_H = U_H e^{i(\beta_2 - \beta_1) d} \\ D'_H = D_H e^{i(\beta_2 - \beta_1) d} \\ t'_H = t_H e^{i(\beta_2 - \beta_1) d} e^{-i(\beta_2 - \beta_3) d} \end{array} \right. \quad (D.2.20)$$

et de même en polarisation V pour le champ magnétique.

Communications scientifiques et bibliographie

Communications scientifiques

Congrès

1. Manifestation scientifique du métier Détection Electromagnétique de la DGA, ENSTA, Paris, France, novembre 2006.
<http://www.defense.gouv.fr/dga/>.
2. GDR Ondes (réunion plénière), Bordeaux, France, novembre 2007, poster.
<http://gdr-ondes.lss.supelec.fr/>.
3. IEEE International Geoscience & Remote Sensing Symposium , Boston, USA, juillet 2008, présentation orale & poster.
<http://www.igarss08.org/>.
4. Workshop Waves In Fluids II, Paraty, Brésil, août 2008.
<http://web.mac.com/kraenkel/wavesinfluids/Workshop.html>.
5. Workshop Rogue Waves, IFREMER, Brest, France, octobre 2008.
<http://www.ifremer.fr/web-com/stw2008/rw/>.
6. Journées scientifiques 2009 d'URSI-France, CNAM, Paris, France, mars 2009.
<http://ursi-france.institut-telecom.fr/>.

Publications

1. Noguier, F., C.-A. Guérin, and B. Chapron (2009), “*Choppy wave*” model for non-linear gravity waves, J. Geophys. Res., 114, C09012, doi :10.1029/2008JC004984.
2. Noguier, F., C.-A. Guérin, and B. Chapron, *Scattering from nonlinear gravity waves : the “choppy wave” model*, Journal of Geophysical Research - Oceans (soumis).



JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, VOL. 114, C09012, doi:10.1029/2008JC004984, 2009

“Choppy wave” model for nonlinear gravity waves

Frédéric Nouguier,¹ Charles-Antoine Guérin,² and Bertrand Chapron³

Received 24 June 2008; revised 23 March 2009; accepted 18 May 2009; published 17 September 2009.

[1] We investigate the statistical properties of a three-dimensional simple and versatile model for weakly nonlinear gravity waves in infinite depth, referred to as the “choppy wave model” (CWM). This model is analytically tractable, numerically efficient, and robust to the inclusion of high frequencies. It is based on horizontal rather than vertical local displacement of a linear surface and is a priori not restricted to large wavelengths. Under the assumption of space and time stationarity, we establish the complete first- and second-order statistical properties of surface random elevations and slopes for long-crested as well as fully two-dimensional surfaces, and we provide some characteristics of the surface variation rate and frequency spectrum. We establish a relationship between the so-called “dressed spectrum,” which is the enriched wave number spectrum of the nonlinear surface, and the “undressed” one, which is the spectrum of the underlying linear surface. The obtained results compare favorably with other classical analytical nonlinear theories. The slope statistics are further found to exhibit non-Gaussian peakedness characteristics. Compared to observations, the measured non-Gaussian omnidirectional slope statistics can only be explained by non-Gaussian effects and are consistently approached by the CWM.

Citation: Nouguier, F., C.-A. Guérin, and B. Chapron (2009), “Choppy wave” model for nonlinear gravity waves, *J. Geophys. Res.*, 114, C09012, doi:10.1029/2008JC004984.

1. Introduction

[2] The development of fully consistent inversions of sea surface short wave characteristics via the ever increasing capabilities (radiometric precision, spatial resolution) of remote sensing measurements has considerably advanced. Yet, difficulties remain, mostly associated to stringent requirements to have adequate understandings and means to describe very precisely the sea surface statistical properties in relation to surface wave dynamics. The simplest linear superposition and Gaussian models remain in common use. Such models provide insight and are often accurate enough for many practical purposes. Yet, common visual inspections of natural ocean surface waves often reveal geometrical asymmetries. Namely, when the steepness of a wave locally increases, its crest becomes sharper and its trough flatter. Harmonic phase couplings occur, and an ocean surface wave field can become rapidly a non-Gaussian random process. For remote sensing applications and model developments, the statistical description of random nonlinear gravity waves is then certainly not straightforward, but must be taken into account to improve uses and interpretation of measurements, e.g., to correct for the sea state bias in altimetry, to explain the upwind/downwind asymmetry of

the radar cross section or to interpret the role of fast scatterer in Doppler spectra.

[3] As usually described, nonlinear surface gravity waves are generally prescribed in the context of the potential flow of an ideal fluid. For small wave steepness, the resulting nonlinear evolution equations can first be solved by means of a perturbation expansion [Tick, 1959]. This approach consists in finding iteratively a perturbative solution of the equations of motion for both the surface elevation and the velocity potential, by matching the boundary conditions at the bottom and at the free surface [Hasselmann, 1962; Longuet-Higgins, 1963; Weber and Barrick, 1977]. Following an other approach, Zakharov [1968] showed that the wave height and velocity potential evaluated on the free surface are canonically conjugate variables. This helps to uniquely formulate the water wave equations as a Hamiltonian system. For water waves, the Hamiltonian is the total energy E of the fluid. The Hamiltonian approach is based on operators expansions technique [Zakharov, 1968; Creamer et al., 1989; Watson and West, 1975; West et al., 1987; Fructus et al., 2005], albeit using truncated Hamiltonian. We refer to Elfouhaily [2000] for a comparison and discussion between the two approaches. For two-dimensional water waves, where the free surface evolves as a function of one variable in space, effective methods have been improved and include conformal mapping variables [Zakharov et al., 2002; Ruban, 2005; Chalikov and Sheinin, 2005]. A recent review on numerical methods for irrotational waves can be found in the paper by Dias and Bridges [2006]. For the three-dimensional problem, one loses the possibility to employ complex analysis, except to still consider a quasi-planar approximation, i.e., very long

¹Institut Fresnel, UMR 6133, Faculté de Saint-Jérôme, Université Paul Cézanne, CNRS, Marseille, France.

²LSEET, UMR 6017, Université du Sud-Toulon-Var, CNRS, La Garde, France.

³Laboratoire d'Océanographie Spatiale, IFREMER, Plouzané, France.

crested waves. Consequently, for the general problem, the perturbative technique has the advantage of simplicity, but remains essentially a low-frequency expansion and produces some nonphysical effects at higher frequencies, such as the divergence of the second-order spectrum. The Hamiltonian approach will be capable of handling stronger nonlinearities but is more tedious, remains essentially numerical and does not provide explicit statistical formulas. Finally, a Lagrangian description of surface wave motion may be more appropriate to describe steep waves [Chalikov and Sheinin, 2005]. In such a context, the Gerstner wave [Gerstner, 1809] is a first well-known exact solution for rotational waves in deep water, and Stokes [1847] derived a second-order Lagrangian approximation for irrotational waves leading to a well-known and observed net mass transport, the Stokes drift phenomenon, in the direction of the wave propagation.

[4] The aim of this paper is to build on this latter simplified phase perturbation methodology to propose a simple, versatile model, that can reproduce the lowest-order nonlinearity of the perturbative expansion but does not suffer from its related shortcomings. This analytical model is certainly not properly new, as it is widely used by the computer graphics community [Fournier and Reeves, 1986; J. Tessendorf, unpublished data, 2004] to produce real-time realistic looking sea surfaces. The terminology choppy wave model (henceforth abbreviated to “CWM”) originates from the visual effect imposed by the transformation compared to linear waves. In addition to gravity waves nonlinear interaction, the model can incorporate further physical features such as the horizontal skewness induced by wind action over the waves, an effect that we will not consider in this paper and which will be left for subsequent work.

[5] On the mathematical level, the model identifies completely with the perturbative expansion in Lagrangian coordinates as proposed four decades ago by Pierson [1962, 1961]. In the case of a single wave, it coincides with the Gerstner solution and is consistent with the Stokes expansion [Stokes, 1880] at third order in slope. Our present contribution is to provide a complete, nontrivial statistical study of this model and a comparison with the classical approaches. As understood, the CWM does not claim to compete with Hamiltonian-based methods and is in fact limited to the lowest-order nonlinearity. Its main strength is to provide a good compromise between simplicity, stability and accuracy. More precisely, it is (1) numerically efficient, as time evolving sample surfaces can be generated by FFT; (2) analytically tractable, as it provides explicit formulas for the first- and second-order point statistics; and (3) robust to the frequency regime, as it is found to be equivalent to the canonical approach [Creamer et al., 1989] at low frequencies while remaining stable at higher frequencies.

[6] In the following we have studied the two- and three-dimensional case pertaining to long-crested or truly two-dimensional sea surfaces, which from now on we will refer to as the 2-D and 3-D case. Since the methodology remains the same in both instances, we have chosen to give a complete exposure of the technique in the 2-D case which is considerably simpler. All the analytical results of the 2-D case (section 2) have their counterpart in the 3-D case (section 3). In the subsequent study, the emphasis will be put on the spatial properties of a “frozen” surface, even

through some temporal properties will also be discussed. Using a phase perturbation in the Fourier domain, the nonlinear local transformation simply consists in shifting the horizontal surface coordinates. Starting with a linear, reference surface, assumed to be a second-order Gaussian stationary process in space and time with given power spectrum, the complete first- and second-order properties of the resulting, non-Gaussian, random process is derived and related to the statistics of the reference surface. In particular, the resulting spectrum, which we refer to as dressed, has been related to the reference spectrum, termed undressed, in a way which is found to be very similar to Weber and Barrick’s [1977] and Creamer et al.’s [1989], but corrects the former and extends the latter to the 3-D case. As well, the sea surface slope statistical description is modified to exhibit a non-Gaussian behavior with a measurable peakedness effect, i.e., an excess of zero and steep slopes. A comparison with recent airborne laser measurements which allows to discriminate the slope statistics of gravity waves from smaller, short gravity, and capillary waves, is presented in section 4. As found, the CWM brings the excess kurtosis of omnidirectional slopes significantly closer to the data.

2. The 2-D Model

2.1. Definition

[7] As mentioned above, our goal is to assess the statistical properties of a nonlinear random process resulting from shifting horizontal coordinates. For a Gerstner wave in deep water only, the coordinates (x, z) of particles at the free surface have the following parameterization in time t :

$$\begin{aligned} x &= x_0 - a \sin(kx_0 - \omega t) \\ z &= a \cos(kx_0 - \omega t), \end{aligned}$$

where the points $(x_0, 0)$ labels the undisturbed surface and $\omega = \sqrt{g|k|}$ satisfies the gravity-waves dispersion relation ($g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ is the acceleration due to gravity). This model introduces the horizontal displacement $D(x, t) = -a \sin(kx_0 - \omega t)$. At a given time, the locus of the points on the free surface describes a trochoid. Strictly, this solution is not physical since it produces rotational motion. However, the vorticity is of order $(ka)^2$, and the solution is expected to be accurate for small slope parameter $ka \ll 1$. The obvious generalization to multiple waves writes,

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \sum_j a_j \sin(k_j x_0 - \omega_j t + \phi_j) \\ z &= \sum_j a_j \cos(k_j x_0 - \omega_j t + \phi_j), \end{aligned}$$

where $\omega_j = \sqrt{g|k_j|}$ and ϕ_j are random phases. Such superpositions are known to be the solutions of the linearized equations of motion in Lagrangian coordinates [Pierson, 1961, 1962; Gjosund, 2003] but include effects that are nonlinear in the Eulerian formulation.

[8] Note that the horizontal displacement of the particles can be achieved through the Hilbert transform of the vertical coordinate, since this operation turns sine into cosine functions. Accordingly, the proposed nonlinear superposition also compares to the improved linear representation derived by Creamer et al. [1989]. A discrete or continuous

C09012

NOUGUIER ET AL.: CHOPPY WAVE MODEL FOR GRAVITY WAVES

C09012

superposition can thus be realized though the following nonlinear transformation:

$$(x, h(x, t)) \mapsto (x + D(x, t), h(x, t)) \quad (1)$$

where the horizontal displacement

$$D(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \, i \, \text{sign}(k) e^{ikx} \hat{h}(k, t) \quad (2)$$

is the Hilbert transform of the Gaussian elevation profile $h(x, t)$. Here the function \hat{h} is the spatial Fourier transform of the surface elevation:

$$\hat{h}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-ikx} h(x, t). \quad (3)$$

The relation

$$\tilde{h}(x + D(x, t), t) = h(x, t) \quad (4)$$

implicitly defines a function \tilde{h} for the displaced surface, provided the map $x \mapsto x - D(x, t)$ is one-to-one, an assumption that will be made systematically in the following. This is the case if the space derivative D' remains smaller than one in magnitude.

2.2. Statistical Properties of the Space Process

[9] We will now study the spatial statistical properties of the displaced surface \tilde{h} at a given time, say $t = 0$. The time dependence will from now on be omitted. The underlying reference surface $h(x)$ is assumed to be a stationary centered Gaussian process, which results from the summation of a sufficient number of free waves. Under this assumption, the process $D'(x)$ is again stationary and Gaussian, with the same variance as the slope process h' . Hence, the model is expected to hold for moderate slopes, for which the threshold $|D'| = 1$ is attained with exponentially small probability.

[10] We will denote C and Γ the spatial correlation function and spectrum of h , respectively:

$$C(x) = \langle h(x)h(0) \rangle, \quad \Gamma(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} C(x) dx \quad (5)$$

where the bracket denotes the ensemble average. Even though the function \tilde{h} is not explicit, its first- and second-order statistical properties can be established analytically. In order not to go too far off the leading path of the paper, we have chosen to restrict the study to the statistical quantities which are truly needed for the scattering problem, namely the first- and second-order properties of the surface process. We will thus derive the distribution of elevations and slopes, together with the wave number spectrum. In the long-crested case, we will also provide the distribution of variation rate of elevation at a given location, together with the frequency spectrum. These quantities will be later compared with those derived from classical theoretical approaches. There is also an abundant literature of nonlinear wave amplitudes (crests, troughs or crest-to-trough amplitudes). Many studies have dealt with intercomparison of wave height distributions after approximate solutions, exact numerical models or experi-

mental measurements. A recent survey are given by *Tayfun and Fedele* [2007]. We will, however, not discuss here the height-amplitude distribution after the CWM, a study which is left for further investigation.

2.2.1. First-Order Properties

[11] The one-point characteristic function of the nonlinear surface is given by:

$$\Phi(v) = \langle e^{iv\tilde{h}} \rangle. \quad (6)$$

Since the process \tilde{h} is stationary, we can rewrite:

$$\Phi(v) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \langle e^{iv\tilde{h}(x)} \rangle dx \quad (7)$$

Now, operating the change of variable $x \mapsto x + D(x)$ makes it possible to eliminate the implicit function \tilde{h} :

$$\Phi(v) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} \langle e^{ivh(x)} (1 + D'(x)) dx \rangle \quad (8)$$

As h and D' are Gaussian stationary processes, the term in bracket can be easily evaluated yielding to:

$$\Phi(v) = (1 - iv\sigma_1^2) \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma_0^2\right) \quad (9)$$

Here, we have introduced the absolute moments of the spectrum:

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |k^n| \Gamma(k) dk \quad (10)$$

Note that σ_0^2 and σ_2^2 are the mean squared height (msh) and mean squared slope (mss) parameters of the surface, respectively. A Fourier inversion of (9) provides the probability distribution function (pdf) of elevations:

$$\tilde{P}_0(z) = P_0(z) \left(1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} z\right) \quad (11)$$

where

$$P_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (12)$$

is the centered normal law with variance σ_n^2 . The evaluation of the characteristic function together with its successive derivatives at the origin provides the first few moments and cumulants ($\tilde{\kappa}_n$) of the transformed process:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{h} \rangle &= -\sigma_1^2, \quad \langle \tilde{h}^2 \rangle = \sigma_0^2, \quad \langle \tilde{h}^3 \rangle = -3\sigma_0^2\sigma_1^2, \quad \langle \tilde{h}^4 \rangle = 3\sigma_0^4 \\ \tilde{\kappa}_1 &= -\sigma_1^2, \quad \tilde{\kappa}_2 = \sigma_0^2 - \sigma_1^4, \quad \tilde{\kappa}_3 = -2\sigma_1^6, \quad \tilde{\kappa}_4 = -6\sigma_1^8 + 3\sigma_2^2 \end{aligned} \quad (13)$$

[12] Starting with a zero-mean linear surface, the resulting nonlinear surface becomes a nonzero mean random non-

C09012

NOUGUIER ET AL.: CHOPPY WAVE MODEL FOR GRAVITY WAVES

C09012

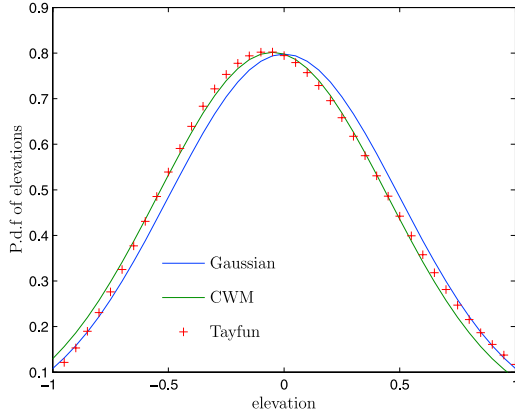


Figure 1. Comparison of the distribution of elevations for the CWM and the Tayfun distribution, for typical parameters $\nu = 0.1$ and $\sigma_0 = 0.5$ m. The Gaussian distribution is given as reference.

Gaussian process. The corresponding skewness is slightly negative,

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{\tilde{\kappa}_3}{\tilde{\kappa}_2^{3/2}} = \frac{-2\sigma_1^6}{(\sigma_0^2 - \sigma_1^4)^{3/2}}, \quad (14)$$

and the msh is slightly diminished. There is no, however, significant creation of kurtosis with respect to the Gaussian case:

$$\tilde{\lambda}_4 = \frac{\tilde{\kappa}_4}{\tilde{\kappa}_2^2} = \frac{-6\sigma_1^8}{(\sigma_0^2 - \sigma_1^4)^2} + 3 \quad (15)$$

Hence the transformed surface is shifted toward negative values and skewed. This is natural since the transformation tends to sharpen the crests and enlarge the troughs, unbalancing the contribution of top and bottom points in favor of the latter. The obtained distribution of elevation (11) can be compared with the well-known Tayfun distribution for narrow spectra [Tayfun, 1980], rewritten for the pdf with our notations:

$$P_{\text{Tayfun}}(z) = \frac{1}{\pi\sigma_0\nu} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\nu^2}} \left(e^{\frac{(1-C(\xi))^2}{2\nu^2}} + e^{\frac{(1+C(\xi))^2}{2\nu^2}} \right) \frac{d\xi}{C(\xi)} \quad (16)$$

where $\nu = k_0\sigma_0$ is a small dimensionless parameter, k_0 is the central wave number of the narrow spectrum, and $C(\xi) = (1 + 2k_0z + \xi^2)^{1/2}$. For narrow spectra, note that $\sigma_1^2 \simeq k_0\sigma_0^2$, so that the CWM distribution (11) is also a function of the parameters ν and k_0 . Figure 1 gives a comparison of the Gaussian reference distribution, the distribution arising (11) from the CWM and the Tayfun distribution for typical parameters $\nu = 0.1$ and $\sigma_0 = 0.5$ m. The CWM is extremely

close to the Tayfun distribution in the first standard deviation interval.

[13] Differentiating equation (4) provides an implicit definition of the slopes of transform process:

$$\frac{d\tilde{h}}{dx}(x + D(x)) = \frac{h'(x)}{1 + D'(x)} \quad (17)$$

We have not been able to calculate explicitly the characteristic function of the slopes process. However, $h'(x)$ and $D'(x)$ are two independent random variables, and we can use a formula for the distribution of quotient to derive the pdf. of slopes as:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x |P_2(zx) P_2(x-1)| \\ &= \frac{e^{-1/2\sigma_2^2}}{\pi(1+z^2)^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \frac{\sigma_2^2(1+z^2) + 1}{(1+z^2)^{5/2}} \\ &\quad \times \text{Erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma_2^2(1+z^2)}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2} \left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (18)$$

where Erf is the error function. Note that this distribution is even. The transformed slopes are thus centered and unskewed. The fourth moment of this distribution is unbounded, making the tail of the distribution unrealistic. The distribution should thus be truncated beyond a given threshold value. It can be checked that this truncation has a negligible impact on the normalization of the distribution, since the steepest events are very rare. It is interesting to note that a very resembling expression was recently obtained for the distribution of slope at a level upcrossing in the framework of a similar Lagrangian model, the main ingredient of the proof being Rice's formula for level crossings [Aberg, 2007].

[14] To test the shape of the distribution, we can compare it with the classical Gram-Charlier expansion as used by Cox and Munk [1954] to analyze ocean glitter distribution,

$$\tilde{P}_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-z^2/2\sigma_2^2} \times \left(1 + \frac{c_4}{24} \times \left(\frac{z^4}{\sigma_2^4} - 6 \frac{z^2}{\sigma_2^2} + 3 \right) \right) \quad (19)$$

Figure 2 shows the different distributions for a typical mss slope value $\tilde{\sigma}_2^2 = 0.03$. (Second-order moment of CWM and Cox and Munk slopes pdf's are set equals.) The agreement between a Gram-Charlier expansion and CWM is found excellent with a clear departure from the Gaussian distribution. For the chosen mss, the agreement is found with $c_4 = \lambda'_4 - 3 \simeq 0.27$. This excess of kurtosis is comparable to Cox and Munk reported values. Since the CWM slopes excess kurtosis is unbounded, we truncated the CWM distribution at a realistic maximum slope value, here $z_{\text{max}} = 0.7$. As derived, this excess of kurtosis is a consequence of the geometrical wave profile asymmetries, but also on the implicit modulation of the shorter waves by much longer waves [e.g., Creamer et al., 1989, paragraph 5]. These

C09012

NOUGUIER ET AL.: CHOPPY WAVE MODEL FOR GRAVITY WAVES

C09012

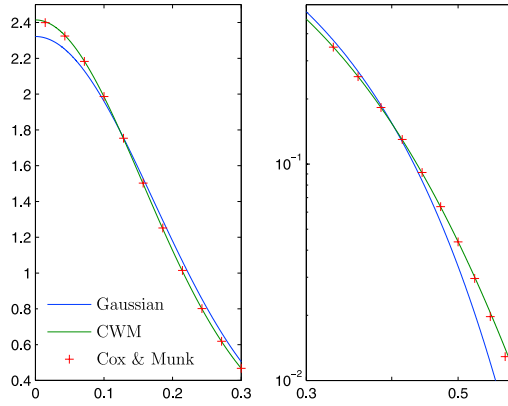


Figure 2. Slopes' distributions after CWM and Gram-Charlier expansion. The Gaussian distribution is given as reference.

interactions can then further lead to an excess of kurtosis [Chapron *et al.*, 2000].

2.2.2. Second-Order Properties

[15] The second-order statistical properties are completely characterized by the two-point characteristic function $\langle \exp(i\nu_1 h(x_1) + i\nu_2 h(x_2)) \rangle$. We did not find it possible to obtain the latter analytically. However, we can derive a related function, namely its one-dimensional Fourier transform on the diagonal:

$$\Psi(u; \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \left(\langle e^{i\nu(\tilde{h}(x) - \tilde{h}(0))} \rangle - \langle e^{i\nu\tilde{h}(x)} \rangle \langle e^{-i\nu\tilde{h}(0)} \rangle \right) dx. \quad (20)$$

Introducing the structure function:

$$S_0(x) = \langle |h(x) - h(0)|^2 \rangle = 2[\sigma_0^2 - C(x)], \quad (21)$$

applying the change of variable as in equation (8) and using standard properties of Gaussian processes [Papoulis, 1965], we obtain:

$$\Psi(u; \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \left[\exp\left(-\frac{(u^2 + \nu^2) S_0}{2}\right) \left[1 - 2i\nu C' - C'' - u^2 C'^2 + \frac{1}{4} \nu^2 S_1^2 \right] - \exp\left(-(u^2 + \nu^2) \sigma_0^2\right) (1 + \nu^2 \sigma_1^4) \right] dx \quad (22)$$

Here we have introduced the first and second derivative of the correlation function (C' and C'' , respectively) and the structure function:

$$S_1(x) = 2[\sigma_1^2 - C_1(x)] \quad (23)$$

where C_1 is the so-called Gilbert transform of the correlation function:

$$C_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k| \Gamma(k) e^{ikx}. \quad (24)$$

[16] Now denote \tilde{C} and $\tilde{\Gamma}$ the centered correlation function and spectrum of the nonlinear process,

$$\begin{aligned} \tilde{C}(x) &= \langle \tilde{h}(x) \tilde{h}(0) \rangle - \langle \tilde{h}(x) \rangle \langle \tilde{h}(0) \rangle, \\ \tilde{\Gamma}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \tilde{C}(x) dx \end{aligned} \quad (25)$$

We will make use of the terminology introduced by *Elfouhaily et al.* [1999] and *Soriano et al.* [2006] to designate the quantities pertaining to the linear or transformed processes. The “measured,” “output,” or dressed spectrum denotes the spectrum which is actually measured experimentally on the true ocean surface, including nonlinearities (\tilde{h}). The “bare,” “input,” or undressed spectrum refers to the linear surface that underlies the nonlinear process (h). To be able to generate realistic nonlinear surfaces, it is important to have a relationship between dressed and undressed quantities. For this we observe that:

$$\tilde{\Gamma}(k) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial^2 \Psi(k, \nu)}{\partial \nu^2} \right]_{\nu=0} \quad (26)$$

resulting in the following expression of the dressed spectrum:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} \left\{ e^{-k^2 \sigma_0^2} (\sigma_0^2 - \sigma_1^4) \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{1}{2} k^2 S_0} \left[\frac{1}{2} S_0 (1 - 2ikC' - C'' - k^2 C'^2) - \frac{1}{4} S_1^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

The dependence in the space variable is implicit in the involved functions. The oscillating nature and the slow decay of the correlation function for sea spectra makes the numerical evaluation of the above integral challenging. However, the formula can be simplified considerably by investigating the different frequency regimes.

2.2.3. Low-Frequency Asymptotics

[17] For small values of $k\sigma_0$ the real exponentials arising in formula (27) can be linearized. Reordering the different terms in the expansion according to powers of $k\sigma_0$, and using the identity:

$$k^2(\Gamma * \Gamma) = 2(k\Gamma) * (k\Gamma) + 2(\Gamma) * (k^2\Gamma), \quad (28)$$

we obtain at the lowest corrective order the following expression for the dressed spectrum:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(k) &= \Gamma(k) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \Gamma(k') \{ k^2 \Gamma(k - k') - 2k^2 \Gamma(k) \} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \Gamma(k') \Gamma(k - k') [|k'| |k - k'| - k'(k - k')] \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk' |k'| |k| \Gamma(k) \Gamma(k') \end{aligned} \quad (29)$$

A consistency check can be performed by integrating this modified spectrum and comparing it with the variance of elevation found previously. Even though the above expansion holds at low frequency only, the variance of elevations is imposed by large scales and thus the comparison is

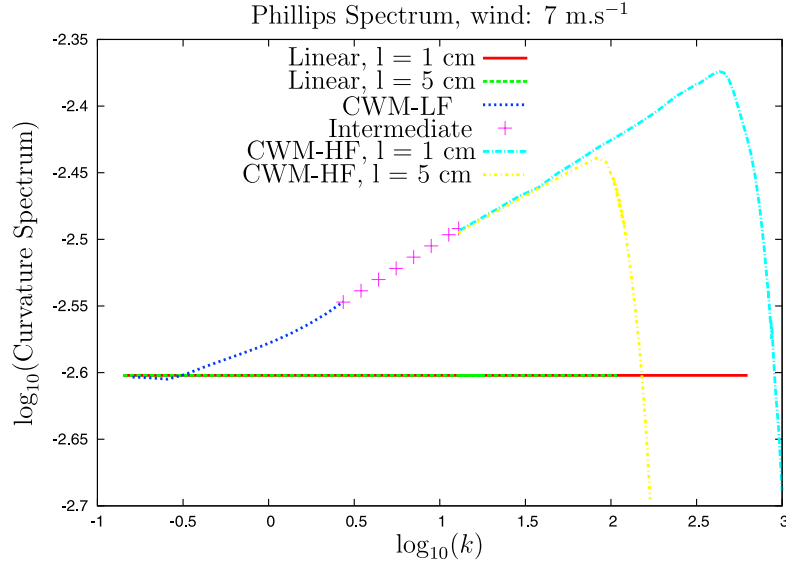


Figure 3. Dressed and undressed curvature for a Phillips spectrum at 7 m s^{-1} versus wave number k (in decimal log-log scale). The different approximations of the dressed spectrum (low- and high-frequency regime) are shown in their respective range of validity. The high-frequency regime depends on the chosen cutoff l for the smaller gravity waves. HF, high frequency; LF, low frequency.

meaningful. The integration leads after simple manipulations to:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{\Gamma}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \Gamma(k) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dk |k| \Gamma(k) \right)^2, \quad (30)$$

which coincides with the variance of elevation predicted by (13). The low-frequency formula will be compared in section 4 with classical expansions of the literature.

2.2.4. High-Frequency Asymptotics

[18] For $k\sigma_0 \sim 1$, the integrand in (27) contribute mainly through their behavior around the origin. Since the functions C' and S_1 vanish at zero and $\sigma_2^2 \ll 1$, $\sigma_1^4 \ll \sigma_0^2$, the dressed spectrum may be approximated by:

$$\tilde{\Gamma}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} \left[e^{-k^2 \sigma_0^2 \sigma_0^2} - e^{-\frac{1}{2} k^2 S_0} \frac{1}{2} S_0 \right] \quad (31)$$

[19] Figure 3 shows an example of dressed spectrum for a Phillips undressed spectrum by a wind of 7 m s^{-1} ($\Gamma(k) = 0.0025 |k|^{-3}$, $k_p < k < k_u$), where $k_p = 0.14 \text{ rad m}^{-1}$ is the peak frequency and k_u is a high-frequency cutoff for gravity waves. The transition between gravity and capillarity waves is not sharp and involves surface wavelengths l between 1 and 5 cm, so that the value of $k_u = 2\pi/l$ lies in the range from 125 to 630 rad m^{-1} .

[20] To highlight the difference with the undressed spectrum, it is the curvature $k^3 \Gamma(k)$ which is plotted. The straight horizontal line corresponds to the constant curvature 0.025 of the linear surface. The different approximations of the dressed spectrum are shown in their respective range of validity. The dressed spectrum has an enhanced curvature of

1.5–2 dB at higher frequencies, with a peak depending on the chosen value of k_u . Note that the dressed spectrum is nonvanishing at k_u , which means that nonlinearities have added high-frequency components. The low-frequency formula is consistent with the high-frequency expansion but starts diverging around $k = 10 \text{ rad m}^{-1}$.

2.3. Statistical Properties of the Time Process

2.3.1. First-Order Properties

[21] The technique which has been used to derive spatial first-order distribution functions can also be employed to obtain first-order statistical properties in the time domain, assuming the process is stationary in time. As an example we will derive the probability density function of the variation rate $\partial_t \tilde{h}$ at a given location (the superscript “t” refers to time-dependent quantities):

$$\tilde{P}_2'(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle e^{i\nu \partial_t \tilde{h}(x,t)} \right\rangle e^{-i\nu \tau} d\nu \quad (32)$$

For one-sided time spectra, that is for waves traveling in one single direction, say to the right, we might write the time process in the form:

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{i(kx - \text{sign}(k)\omega t)} \hat{h}(k), \quad (33)$$

where as usual $\omega = \sqrt{g|k|}$. Using the same spatial averaging as in (8), we obtain in a similar way as previously the following distribution of the variation rate:

$$\tilde{P}_2'(\tau) = \int_{\mathbb{R}^2} |x_2| (1 + x_1) P_2'(\tau x_2) G(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (34)$$

C09012

NOUGUIER ET AL.: CHOPPY WAVE MODEL FOR GRAVITY WAVES

C09012

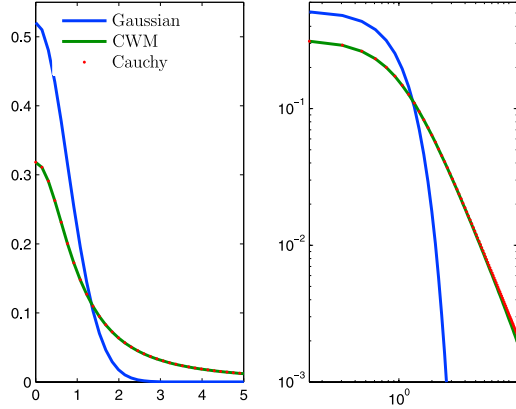


Figure 4. Distribution of variation rate $\partial_t \tilde{h}$ after CWM transformation. The Gaussian distribution of the underlying linear surface is given as reference (only the positive part of the symmetric distribution is shown).

where P_2^f is the Gaussian distribution of $\partial_t \tilde{h}$ (mss: $g\sigma_1^2$) and G is the bivariate Gaussian distribution with covariance matrix:

$$N = \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sqrt{g}\sigma_{3/2}^2 \\ -\sqrt{g}\sigma_{3/2}^2 & g\sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

We have not been able to push the analytical calculation further, but this double integral can be easily implemented numerically. It is parameterized by the absolute moments σ_n of the k spectrum. Figure 4 shows the time-slope probability density function for a 10 m s^{-1} wind speed, omnidirectional fully developed Elfouhaily spectrum. A comparison is given with the corresponding Gaussian distribution P_2^f . The slope distribution P_2^f of the CWM can be fitted with a striking accuracy with the Cauchy distribution, $p(\tau) = 1/\pi(1 + \tau^2)$. Hence, it has a slow τ^{-2} decay at large arguments, thereby rendering quite probable the occurrence of very large slopes. A recent experimental study by Joelson and Néel [2008] has shown that the distribution of variation rate measured in a tank can actually be well fitted by heavy tail distributions such as alpha-stable laws.

2.3.2. Second-Order Properties

[22] Even though the surface evolution is essentially governed by the linear dispersion relationship, the occurrence of nonlinear interactions alters the latter. The main contribution to the time spectrum energy at frequency ω is due to the waves of length $\lambda = 2\pi/k = 2\pi g/\omega^2$, but different scales are also involved through nonlinear effects. The simple example of the Gerstner wave is illuminating in that respect, as it contains different spatial scales (the bound waves) traveling with the same velocity. Hence, nonlinearities render the definition of the dispersion relationship ambiguous. However, experimental set-ups very often record surface elevation variation with time at a prescribed location and therefore provide estimation of time domain spectra. As mentioned, the presence of nonlinearities makes the link with space domain spectra difficult. Hence, incorporating time domain spectra in the model is highly desir-

able. We have not, however, been able to fully mimic the procedure that was adopted for space spectra. However, the time spectrum can be easily estimated under the assumption of small displacements, an hypothesis which is valid if the surface has only low-frequency components. Denote C^t and Γ^t , respectively, the temporal correlation function and frequency spectrum,

$$C^t(\tau) = \langle h(0, \tau)h(0, 0) \rangle, \Gamma^t(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\Omega\tau} C^t(\tau) d\tau, \quad (35)$$

as well as their nonlinear counterparts \tilde{C}^t and $\tilde{\Gamma}^t$:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^t(\tau) &= \langle \tilde{h}(0, \tau)\tilde{h}(0, 0) \rangle - (\langle \tilde{h}(0, 0) \rangle)^2, \\ \tilde{\Gamma}^t(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\Omega\tau} \tilde{C}^t(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (35')$$

[23] For small displacements D , we may approximate

$$\tilde{h}(x, t) \approx h(x, t) - D(x, t)\partial_x h(x, t), \quad (36)$$

which entails:

$$\tilde{C}^t = C^t \left(1 + \frac{1}{g^2} \partial_\tau^4 C^t \right) + \frac{1}{g^2} (\partial_\tau^2 C^t)^2, \quad (37)$$

or, equivalently, in the frequency domain (* is the convolution in time):

$$\tilde{\Gamma}^t = \Gamma^t + \frac{1}{g^2} [\Gamma^t * (\Omega^4 \Gamma^t) + (\Omega^2 \Gamma^t) * (\Omega^2 \Gamma^t)]. \quad (38)$$

The frequency dressed spectrum thus enjoys a similar relationship as the wave number spectrum in the low-frequency regime (29).

3. The 3-D Model

[24] In the 3-D case, Pierson [1961] has provided the solution of the linearized equations of motion for an inviscid irrotational fluid in Lagrangian coordinates. In deep water, the particle positions at the free surface have following parameterization:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \sum_j a_j \hat{\mathbf{k}}_j \cdot \mathbf{x}_0 \sin(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_j t + \phi_j) \\ y &= y_0 - \sum_j a_j \hat{\mathbf{k}}_j \cdot \mathbf{y}_0 \sin(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_j t + \phi_j) \\ z &= \sum_j a_j \cos(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_j t + \phi_j), \end{aligned}$$

where $\hat{\mathbf{k}}_j$ is a two-dimensional vector, $\hat{\mathbf{k}}_j = \mathbf{k}_j/|\mathbf{k}_j|$ and $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ labels the particles at rest on the flat surface. Similarly to the 2-D case, the corresponding surface can be realized through horizontal displacements of a reference, linear, surface:

$$(\mathbf{r}, h(\mathbf{r}, t)) \mapsto (\mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), h(\mathbf{r}, t)) \quad (39)$$

where $\mathbf{r} = (x, y)$ is the horizontal coordinate. The function

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = i \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{h}(\mathbf{k}, t) \hat{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \quad (40)$$

C09012

NOUGUIER ET AL.: CHOPPY WAVE MODEL FOR GRAVITY WAVES

C09012

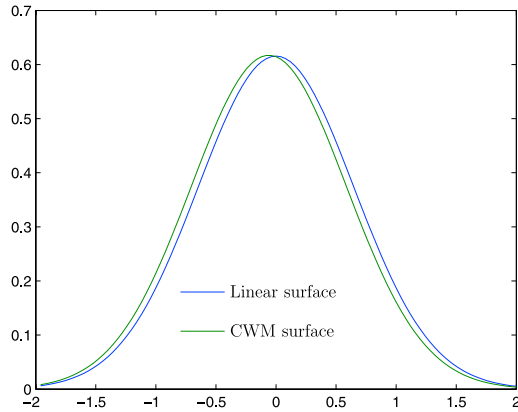


Figure 5. The pdf of elevations of a 3-D linear (h) and CWM (\tilde{h}) surfaces for a wind of 10 m s^{-1} (Elfouhaily spectrum). The nonlinear height distribution is shifted toward negative values.

is the so-called Riesz transform of the function h , and

$$\hat{h}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} h(\mathbf{r}, t) \quad (41)$$

is its two-dimensional spatial Fourier transform.

3.1. First-Order Properties of the Space Process

[25] The calculations are similar to the 2-D case, although more involved.

[26] Let us introduce the partial and total absolute moments of the spectrum:

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|k_x|^\alpha |k_y|^\beta}{|\mathbf{k}|^\gamma} \Gamma(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad \sigma_n^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{k}|^n \Gamma(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (42)$$

[27] Standard calculations lead to the following expression for the characteristic function (43) of elevations:

$$\Phi(v) = (1 - iv\sigma_1^2 + v^2\Sigma_1) \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma_0^2\right) \quad (43)$$

with $\Sigma_1 = \sigma_{111}^4 - \sigma_{201}^2\sigma_{021}^2$. An example of deviation from the normal distribution is shown on Figure 5 for an input linear surface with directional Elfouhaily spectrum [Elfouhaily et al., 1997] at 10 m s^{-1} wind speed.

[28] From the characteristic function, the following moments are easily obtained:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{h} \rangle &= -\sigma_1^2, \quad \langle \tilde{h}^2 \rangle = \sigma_0^2 - 2\Sigma_1 \\ \langle \tilde{h}^3 \rangle &= -3\sigma_0^2\sigma_1^2, \quad \langle \tilde{h}^4 \rangle = 3\sigma_0^4 \left(1 - 4\frac{\Sigma_1}{\sigma_0^2}\right), \end{aligned} \quad (44)$$

as well as the pdf of elevations:

$$\tilde{P}_0(z) = P_0(z) \left(1 + \frac{\Sigma_1}{\sigma_0^2} - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}z - \frac{\Sigma_1}{\sigma_0^4}z^2\right) \quad (45)$$

where as before P_0 is the Gaussian pdf of the linear surface.

[29] We can also derive the skewness ($\tilde{\lambda}_3$) and the kurtosis ($\tilde{\lambda}_4$) of elevation. The respective values for isotropic spectra are given in parenthesis:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_3 &= \frac{-2\sigma_1^2[\sigma_1^4 + 3\Sigma_1]}{[\sigma_0^2 - (\sigma_1^4 + 2\Sigma_1)]^{3/2}} \left(= -\frac{\sigma_1^6}{2} \left(\sigma_0^2 - \frac{\sigma_1^4}{2}\right)^{-3/2}\right) \\ \tilde{\lambda}_4 &= 3 \frac{\sigma_0^4 \left(1 - 4\frac{\Sigma_1}{\sigma_0^2}\right) - \sigma_1^4(\sigma_1^4 + 4\Sigma_1 + 2\sigma_0^2)}{(\sigma_0^2 - (\sigma_1^4 + 2\Sigma_1))^2} \\ &\quad \cdot \left(= 3\sigma_0^2(\sigma_0^2 - \sigma_1^4) \left(\sigma_0^2 - \frac{\sigma_1^4}{2}\right)^{-2}\right) \end{aligned} \quad (46)$$

[30] Again, there is a negative skewness and a positive excess of kurtosis, and the msh is diminished by a negligible amount.

[31] We have not been able to calculate explicitly the pdf of slopes $\tilde{P}_2(\mathbf{z})$. However, we could establish the following integral representation, which can be estimated numerically:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2(\mathbf{z}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{sign}(|J|)|J|^2}{(2\pi)^{5/2}\sqrt{|S_1|}\sqrt{|S_2|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}X^T S_1^{-1} X\right\} \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}Z^T J^T S_2^{-1} J Z\right\} dX \end{aligned} \quad (47)$$

with

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{bmatrix} \sigma_{402}^2 & \sigma_{312}^2 & \sigma_{222}^2 \\ \sigma_{312}^2 & \sigma_{222}^2 & \sigma_{132}^2 \\ \sigma_{222}^2 & \sigma_{132}^2 & \sigma_{042}^2 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{200}^2 & \sigma_{110}^2 \\ \sigma_{110}^2 & \sigma_{020}^2 \end{bmatrix}, \\ X &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 \\ x_2 & 1+x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

where $|M|$ denote the determinant of the matrix M . Figure 6 displays the pdf of slopes in the upwind and crosswind direction for a directional Elfouhaily spectrum [Elfouhaily et al., 1997]. A comparison is given with the associated Gaussian distribution. The tail of the distribution decreases slower for the CWM and is significantly higher than the Gaussian tail for slope magnitudes beyond 0.5. Again, the slopes larger than some threshold (about 0.7) are not physical and the distribution must be truncated beyond this value.

3.2. Second-Order Properties of the Space Process

[32] As in the 2-D case, we can derive the two-dimensional Fourier transform of the two-point characteristic function on the diagonal, namely:

$$\Psi(\mathbf{u}; v) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \left(\left\langle e^{iv(\tilde{h}(\mathbf{r}) - \tilde{h}(\mathbf{0}))} \right\rangle - \left\langle e^{iv\tilde{h}(\mathbf{r})} \right\rangle \left\langle e^{-iv\tilde{h}(\mathbf{0})} \right\rangle \right) d\mathbf{r}. \quad (48)$$

C09012

NOUGUIER ET AL.: CHOPPY WAVE MODEL FOR GRAVITY WAVES

C09012

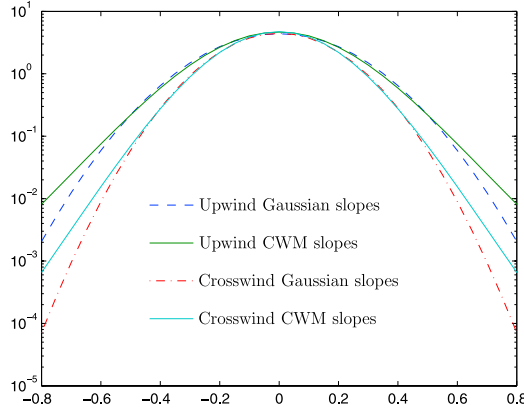


Figure 6. Distribution of slopes for linear and CWM surfaces at a wind of 12 m s^{-1} (Elfouhaily spectrum). The logarithm is plotted to highlight the difference at large arguments.

Operating the change of variable $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r})$ we obtain:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{u}; v) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} & \left[- \left| \left\langle e^{iv(h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{0})) + i\mathbf{u} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})} |J(\mathbf{r})| \right\rangle \right|^2 \right. \\ & \left. + \left\langle e^{iv(h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{0})) + i\mathbf{u} \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{r}) - \mathbf{D}(\mathbf{0}))} |J(\mathbf{r})| |J(\mathbf{0})| \right\rangle \right] \quad (49) \end{aligned}$$

[33] Here, J is the Jacobian matrix:

$$J(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 + \partial_x D_x(\mathbf{r}) & \partial_x D_y(\mathbf{r}) \\ \partial_y D_x(\mathbf{r}) & 1 + \partial_y D_y(\mathbf{r}) \end{bmatrix}$$

Discarding the quadratic terms in the Jacobian,

$$|J(\mathbf{r})| |J(\mathbf{0})| \approx (1 + \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})) (1 + \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{0})) \quad (50)$$

and using standard properties of Gaussian processes [e.g., Papoulis, 1965] we obtain after tedious but straightforward calculations the following expression for the functional Ψ :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{u}; v) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} & \left[\exp \left(-\frac{v^2}{2} S_0 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \Phi_u \right) \right. \\ & \times \left(1 - 2i\mathbf{u} \cdot \nabla C - (\mathbf{u} \cdot \nabla C)^2 - \Delta C + \frac{v^2}{4} S_1^2 \right) \\ & \left. - (1 + v^2 \sigma_1^4) e^{-v^2 \sigma_0^2} e^{-|\mathbf{u}|^2 \sigma_u^2} \right] \quad (51) \end{aligned}$$

Here ∇C and ΔC are the gradient and the Laplacian of the correlation function, respectively. The dependence in the space variable is implicit. The auxiliary functions Φ_u and S_1 are defined by:

$$S_1(\mathbf{r}) = 2 \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{k}' |\mathbf{k}'| \Gamma(\mathbf{k}') [1 - e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}}] \quad (52)$$

$$\Phi_u(\mathbf{r}) = 2 \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{k}' (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \Gamma(\mathbf{k}') [1 - e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}}] \quad (53)$$

$$\sigma_u^2 = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{k}' (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \Gamma(\mathbf{k}'). \quad (54)$$

[34] Using the same technique as in 2-D we obtain for the dressed spectrum:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} & \left\{ -(\sigma_1^4 - \sigma_0^2) e^{-|\mathbf{k}|^2 \sigma_k^2} \right. \\ & \left. + \left[\frac{-S_0}{2} (1 - \Delta C - 2i\mathbf{k} \cdot \nabla C - (\mathbf{k} \cdot \nabla C)^2) + \frac{S_1^2}{4} \right] e^{-\frac{|\mathbf{k}|^2}{2} \Phi_k} \right\} \quad (55) \end{aligned}$$

The calculation of the low-frequency expansion of the dressed spectrum is similar to the 2-D case, leading to:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\mathbf{k}) = \Gamma(\mathbf{k}) & + \frac{1}{2} |\mathbf{k}|^2 \int d\mathbf{k}' \Gamma(\mathbf{k}') \left\{ \Gamma(\mathbf{k}'') - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \Gamma(\mathbf{k}') \right\} \\ & + \int d\mathbf{k}' |\mathbf{k}'| \Gamma(\mathbf{k}') \Gamma(\mathbf{k}'') |\mathbf{k}''| \left[(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'')^2 - \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'' \right] \\ & - 2 \int d\mathbf{k}' |\mathbf{k}'| |\mathbf{k}| (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \Gamma(\mathbf{k}') \Gamma(\mathbf{k}), \quad (56) \end{aligned}$$

with $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$.

3.3. Undressing the Spectrum

[35] As can be seen on Figure 3, the dressed spectrum has an enhanced curvature with respect to the undressed one. This is natural since the inclusion of bound waves enriches the high-frequency content of the spectrum. In the 3-D case, we might also expect an enhancement of the spreading function at high frequencies through the nonlinear interaction of strongly directive long waves and weakly directive short waves. Now it is the dressed spectrum which is measured experimentally. To generate a nonlinear surface with a preassigned spectrum, it is thus necessary to go through an undressing procedure of the latter. The CWM transformation of the linear, fictitious, surface with undressed spectrum will eventually produce a nonlinear surface with suitable dressed spectrum.

[36] Soriano *et al.* [2006] introduced a simple undressing method assuming a power law form of the high-frequency part of the undressed spectrum. The parameters were fitted in such a way that the dressed spectrum leads to the correct values of the mean square height and slope after the nonlinear transformation proposed by Creamer *et al.* [1989]. Elfouhaily *et al.* [1999] used another method to retrieve the lowest-order cumulants of the nonlinear surface.

[37] The equation (55) can be incorporated in a simple iterative procedure to undress a spectrum with prescribed curvature and spreading function $\tilde{B}_{\text{target}}$, $\tilde{\Delta}_{\text{target}}$. Assuming a

C09012

NOUGUIER ET AL.: CHOPPY WAVE MODEL FOR GRAVITY WAVES

C09012

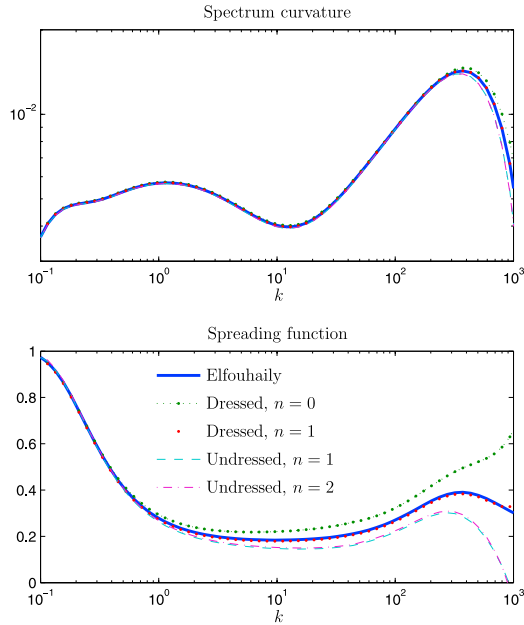


Figure 7. Undressed and dressed curvature and spreading functions after two iterations (Elfouhaily spectrum).

second harmonic azimuthal expansion of the dressed and undressed spectra:

$$2\pi k^4 \Gamma(\mathbf{k}) = B(\mathbf{k})(1 + \Delta(k) \cos(2(\phi_{\mathbf{k}} - \phi_{\text{wind}}))), \quad (57)$$

the iterative procedure to find undressed curvature (B) and spreading (Δ) functions runs as follows:

$$B^{(n+1)} = B^{(n)} - dB^{(n)}, \quad dB^{(n)} = \tilde{B}^{(n)} - \tilde{B}_{\text{target}} \quad (58)$$

$$\Delta^{(n+1)} = \Delta^{(n)} - d\Delta^{(n)}, \quad d\Delta^{(n)} = \tilde{\Delta}^{(n)} - \tilde{\Delta}_{\text{target}} \quad (59)$$

with $B^{(0)} = \tilde{B}_{\text{target}}$ and $\Delta^{(0)} = \tilde{\Delta}_{\text{target}}$. As an example, Figure 7 shows the first few iterates for a fully developed Elfouhaily dressed spectrum by a $U_{10} = 11 \text{ m s}^{-1}$ wind.

3.4. Numerical Surface Generation

3.4.1. Frozen Surface

[38] Sample nonlinear surfaces at a given time can be generated efficiently at the cost of three successive two-dimensional fast Fourier transforms: one for the spectral representation of the linear surface $h(\mathbf{r})$ and the other two for its Riesz transform $\mathbf{D}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{r}_{mn}) &= \Re \sum_{ij} e^{i\mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{mn}} \sqrt{\Gamma(\mathbf{k}_{ij})} e^{i\varphi_{ij}}, \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}_{mn}) &= \Re \sum_{ij} i \frac{\mathbf{k}_{ij}}{|\mathbf{k}_{ij}|} e^{i\mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{mn}} \sqrt{\Gamma(\mathbf{k}_{ij})} e^{i\varphi_{ij}}, \end{aligned} \quad (60)$$

where Γ is the prescribed spectrum and φ_{ij} are random uniform and independent phases on $[0, 2\pi]$. The nonlinear surface is parameterized by the points $(\mathbf{r}_{mn} + \mathbf{D}(\mathbf{r}_{mn}), h(\mathbf{r}_{mn}))$.

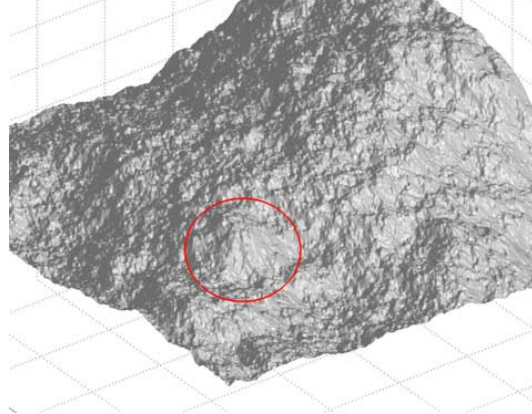


Figure 8. The 512×512 point linear sea surface with $U_{10} = 15 \text{ m s}^{-1}$.

An example is given on Figures 8 and 9 with an Elfouhaily directional spectrum at wind $U_{10} = 15 \text{ m s}^{-1}$. It is a $3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ patch of a total $50 \text{ m} \times 50 \text{ m}$ sea surface generated with 8192×8192 points. The spectrum has been truncated at $k_{\text{max}} = 500 \text{ rad m}^{-1}$, corresponding to a minimal surface wavelength of 1 cm, and the surface is sampled regularly at the Shannon frequency $2k_{\text{max}}$. Since the operation is based on abscissa displacements, the resulting surface is given on a non regular grid. As can be seen on the encircled region of the plot, the crests of the CWM are sharpened while those of the linear surface are smoother.

3.4.2. Time Evolution

[39] The time evolution of nonlinear surface is a challenging issue, essentially because of the absence of a simple and well-defined dispersion relation. However, CWM surface at a given time is obtained by the same transformation (1) of a time-dependent linear surface. Therefore, it suffices to let the reference linear surface evolve and to perform the local transformation at the current time. If we, in addition, assume a fully developed time-independent spectrum, the evolution of the linear surface is simply obtained by use of the

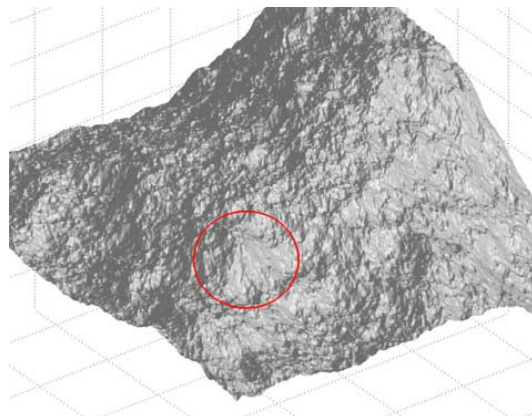


Figure 9. The 512×512 point corresponding to CWM sea surface with $U_{10} = 15 \text{ m s}^{-1}$.

C09012

NOUGUIER ET AL.: CHOPPY WAVE MODEL FOR GRAVITY WAVES

C09012

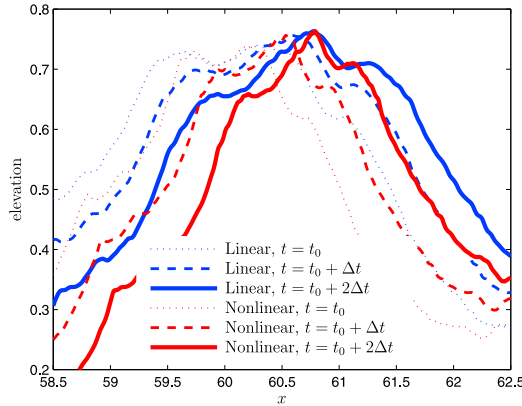


Figure 10. Time evolution of a 2-D sea surface. $\Delta t = 0.1$ s.

gravity-waves dispersion relation $\omega^2 = g|\mathbf{k}|$, and amounts to change the original phases φ_{ij} by an additional factor $-\omega_{ij}t = \pm\sqrt{g|\mathbf{k}_{ij}|}t$ in the FFT (60), depending on the travel direction of the waves.

[40] Figure 10 exemplifies the time evolution of a 2-D linear surface with one-sided time spectrum and the corresponding nonlinear surface. The undressed spectrum was chosen to be the fully developed Elfouhaily spectrum by a wind $U_{10} = 3 \text{ m s}^{-1}$. The sample surface was taken to be 64 m long, with extreme frequencies $k_{\min} = 1.10^{-3} \text{ rad m}^{-1}$ and $k_{\max} = 100 \text{ rad m}^{-1}$ and a sampling of 4096 points. The evolution of 4 m patch is represented for both the linear and CWM surface, with a time step $\Delta t = 0.1$ s.

4. Comparison With Classical Nonlinear Theories

[41] As mentioned in the Introduction, a certain number of fully nonlinear and numerically efficient solutions of potential flows have been developed in recent years. This makes it, in principle, possible to validate approximate theories. In practice, comparing the latter with various exact numerical solutions raises some difficulties, such as the lack of control of the final spectrum in an evolving nonlinear solution, the sensibility to the initial state or the relevance of sample surfaces comparisons. However, fast numerical schemes now allow the derivation of statistical properties of the surface through the use of extensive Monte-Carlo computations, especially for one-dimensional surfaces [e.g., *Chalikov, 2005; Toffoli et al., 2008*]. Nevertheless, going through a validation procedure by systematic comparisons of relevant statistical quantities is an important work which goes far beyond the scope of this paper and is left for further investigation.

4.1. Stokes Expansion

[42] A perturbative expansion of the implicit function \tilde{h} can be obtained in the case of small displacements. We will here limit the discussion to the 2-D case. Supposed that the profile is obtained by dilation of a single dimensionless template h_0 :

$$h(x) = ah_0(Kx), \quad D(x) = aD_0(Kx), \quad (61)$$

where a and $s = Ka$ are height and slope parameters, respectively. Then easy algebra leads to the following expansion, correct at second order in slope

$$\tilde{h} = h - Dh' + DD'h' + \frac{1}{2}D^2h'' \quad (62)$$

[43] In the case of a single wave $h(x) = -a\cos(Kx)$, this perturbative series can be compared with a Stokes expansion. After rearrangement of the different terms in (62) we obtain:

$$\tilde{h}(x) = a \left(-\frac{1}{2}s + \left[1 - \frac{3}{8}s^2 \right] \cos(Kx) - \frac{1}{2}s \cos(2Kx) + \frac{3}{8}s^2 \cos(3Kx) \right), \quad (63)$$

which coincides with a Stokes expansion at third order in slope. Note, however, that the CWM is more general than a mere superposition of Stokes waves, as frequency and phase coupling between the different modes comes in play through the nonlinear terms of the spatial expansion.

4.2. Longuet-Higgins Theory

[44] The classical approach [*Hasselmann, 1962; Longuet-Higgins, 1963*] to the nonlinear theory of gravity waves is to seek both the elevation h and velocity potential Φ in a perturbation series,

$$\tilde{h}(\mathbf{r}, t) = h^{(1)}(\mathbf{r}, t) + h^{(2)}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (64)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \Phi^{(2)}(\mathbf{r}, t) + \dots, \quad (65)$$

where the first terms are given by the linear spectral representation of a Gaussian process,

$$h^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^N a_j \cos \psi_j, \quad \psi_j = \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t - \varphi_j \quad (66)$$

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^N b_j \cos \psi_j, \quad (67)$$

and the following terms in the expansion involve n th-order multiplicative combinations of these linear spectral components. The perturbative expansions of elevation and velocity potential are identified simultaneously by injecting the successive Fourier expansions in the equations of motion. The leading, quadratic, nonlinear term in elevation was provided by *Longuet-Higgins [1963]* in the form (the factor 1/2 in the kernels K_{ij} and K'_{ij} is missing in the original paper by *Longuet-Higgins [1963]*, as was later acknowledged by the author himself [see *Srokosz and Longuet-Higgins, 1986*]:

$$h^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \left[K_{ij} \cos \psi_i \cos \psi_j + K'_{ij} \sin \psi_i \sin \psi_j \right], \quad (68)$$

C09012

NOUGUIER ET AL.: CHOPPY WAVE MODEL FOR GRAVITY WAVES

C09012

where

$$\begin{aligned} K_{ij} &= (|\mathbf{k}_i||\mathbf{k}_j|)^{-\frac{1}{2}} \left[B_{ij}^- + B_{ij}^+ - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j \right] + |\mathbf{k}_i| + |\mathbf{k}_j| \\ K'_{ij} &= (|\mathbf{k}_i||\mathbf{k}_j|)^{-\frac{1}{2}} \left[B_{ij}^- - B_{ij}^+ - |\mathbf{k}_i||\mathbf{k}_j| \right] \\ B_{ij}^\pm &= \frac{\Omega_{ij}^\pm (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j \mp |\mathbf{k}_i||\mathbf{k}_j|)}{\Omega_{ij}^\pm - |\mathbf{k}_i \pm \mathbf{k}_j|} \\ \Omega_{ij}^\pm &= \left(\sqrt{|\mathbf{k}_i|} \pm \sqrt{|\mathbf{k}_j|} \right)^2 \end{aligned} \quad (69)$$

To simplify the comparison we will again concentrate on the 2-D case. For long-crested waves we may operate the substitution $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j \rightarrow \text{sign}(k_i k_j) |k_i k_j|$, leading to simplified expressions of the kernels:

$$K'_{ij} = -\text{sign}(k_i k_j) \max(|k_i|, |k_j|) \quad (70)$$

$$K_{ij} = \min(|k_i|, |k_j|) \quad (71)$$

Now, in the perturbative expansion (62) after the CWM we have:

$$\begin{aligned} h^{(2)}(x, t) &= -D(x, t) \partial_x h^{(1)}(x, t) \\ &= -\sum_{i,j=1}^N a_i a_j k_j \text{sign}(k_i) \sin \psi_i \sin \psi_j. \end{aligned} \quad (72)$$

Since the former process (68) is centered while the latter (72) is not, we must rather compare with a recentered right-hand side:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \left(\tilde{K}_{ij} \cos(\psi_i) \cos(\psi_j) + \tilde{K}'_{ij} \sin(\psi_i) \sin(\psi_j) \right) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_i a_j \tilde{K}_{ij} (\cos(\psi_i - \psi_j) - \delta_{ij}) \\ \text{with } \begin{cases} \tilde{K}'_{ij} &= -\text{sign}(k_i k_j) \max(|k_i|, |k_j|) \\ \tilde{K}_{ij} &= \text{sign}(k_i k_j) \min(|k_i|, |k_j|), \end{cases} \end{aligned} \quad (73)$$

where δ_{ij} is the Kronecker symbol. This last expression is resembling but not identical to the second-order correction (68) of Longuet-Higgins. Note, however, that the respective kernels coincide on the diagonal.

[45] This makes the CWM consistent with Longuet-Higgins theory, at least for narrow spectra. Passing to the limit of infinitely many spectral components, *Longuet-Higgins* [1963] could also derive general formula for the first few cumulants of the second-order nonlinear surface. The mean and RMS of elevation at second-order are found to be identical to those of linear process and the third cumulant turns out to be nonvanishing (in the paper by *Longuet-Higgins* [1963], the following expression is given for one-sided spectrum only):

$$\kappa_3 = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk dk' \min(|k|, |k'|) \Gamma(k) \Gamma(k') \simeq 3 \sigma_0^2 \sigma_1^2 \quad (74)$$

where as usual Γ is the spectrum of the linear process $h^{(1)}$. The corresponding skewness,

$$\lambda_3 \simeq \frac{3 \sigma_1^2}{\sigma_0}, \quad (75)$$

has opposite sign with respect to the skewness (14) derived in the framework of the CWM. However, the absolute values of these quantities are too small for their sign to be meaningful. A quick estimation can be performed with a power law Phillips omnidirectional spectrum, $\Gamma(k) = 0.0025 \times |k|^{-3}$, for $|k| > k_{peak}$, in which case the skewness predicted by the two models are found quasi-independent of the peak wave number, $\lambda_3 \simeq 0.015$ for the Longuet-Higgins theory and $\lambda_3 \simeq -3.10^{-6}$ for the CWM. Note that some recent numerical experiments for one-dimensional surfaces after the so-called ChSh method [*Chalikov*, 2005] show a unambiguously positive skewness, so that the precision of the CWM might not be sufficient to capture the latter correctly.

4.3. Weber and Barrick Theory

[46] In their 1977 companion papers *Weber and Barrick* [1977] and *Barrick and Weber* [1977] revisited the nonlinear theory for random seas with continuous spectra. The adopted methodology is essentially the same as *Longuet-Higgins* [1963] but the perturbative expansion is operated on the continuous Fourier components of the surface. The time-evolving surface elevation is sought in the form:

$$\tilde{h}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{k} \int_{\mathbb{R}} d\omega \hat{h}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (76)$$

and a perturbative expansion is operated on the Fourier components:

$$\hat{h}(\mathbf{k}, \omega) = h_1(\mathbf{k}, \omega) + h_2(\mathbf{k}, \omega) \quad (77)$$

The first-order term correspond to free waves propagating with the gravity wave dispersion relation $\omega = \sqrt{g|\mathbf{k}|}$ (the “linear” term),

$$h_1(\mathbf{k}, \omega) = h_1^+(\mathbf{k}) \delta(\omega - \sqrt{g|\mathbf{k}|}) + h_1^-(\mathbf{k}) \delta(\omega + \sqrt{g|\mathbf{k}|}) \quad (78)$$

while the second-order term is found to be:

$$\begin{aligned} h_2(\mathbf{k}, \omega) &= \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\omega_1 d\omega_2 A(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) \\ &\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) h_1(\mathbf{k}_1, \omega_1) h_1(\mathbf{k}_2, \omega_2) \end{aligned} \quad (79)$$

Here the kernel A is given by:

$$\frac{1}{2} \left(|\mathbf{k}_1| + |\mathbf{k}_2| + \sqrt{|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2|} (1 - \hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}}_2) \frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| + \Omega_{12}^+}{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| - \Omega_{12}^-} \right), \quad (80)$$

where Ω_{12}^\pm is given by (70), and $A = 0$ whenever $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$ and $\omega_2 = -\omega_1$. Even through this is not obvious at first sight, this kernel is consistent with Longuet-Higgins perturbative theory since:

$$A(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) = \frac{1}{2} (K_{ij} - K'_{ij}) \quad (81)$$

To make a comparison with the CWM, we will consider the surface frozen at a given time, say $t = 0$, in which case the

C09012

NOUGUIER ET AL.: CHOPPY WAVE MODEL FOR GRAVITY WAVES

C09012

spatial process $h(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}, 0)$ at first- and second-order can be written:

$$\tilde{h}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{k} [\hat{h}_1(\mathbf{k}) + \hat{h}_2(\mathbf{k})] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (82)$$

with

$$\hat{h}_1(\mathbf{k}) = [\hat{h}_1^+(\mathbf{k}) + \hat{h}_1^-(\mathbf{k})] \quad (83)$$

and

$$h_2(\mathbf{k}) = \sum_{s_1, s_2 = \pm 1} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 A(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) h_1^{s_1}(\mathbf{k}_1) h_1^{s_2}(\mathbf{k}_2) \quad (84)$$

Denoting as usual Γ and $\tilde{\Gamma}$ the first- and higher-order wave number spectra,

$$\begin{aligned} \langle h_1(\mathbf{k}_1) h_1(\mathbf{k}_2) \rangle &= \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \Gamma(\mathbf{k}_1), \\ \langle \tilde{h}(\mathbf{k}_1) \tilde{h}(\mathbf{k}_2) \rangle &= \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \tilde{\Gamma}(\mathbf{k}_1), \end{aligned} \quad (85)$$

we can easily establish the following relationship:

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{k}) = \Gamma(\mathbf{k}) + \int d\mathbf{k}_1 \Pi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_2) \Gamma(\mathbf{k}_1) \Gamma(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1), \quad (86)$$

with

$$\Pi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 2|A(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|^2 \quad (87)$$

In the 2-D case, the kernel reduces to:

$$\Pi(k_1, k_2) = \frac{1}{2}(|k_1| + |k_2|)^2 \quad (88)$$

and thus

$$\tilde{\Gamma}(k) = \Gamma(k) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' k^2 \Gamma(k') \Gamma(k - k'), \quad (89)$$

which is the first integrand appearing in the low-frequency expansion after the CWM (29). As discussed later by *Creamer et al.* [1989], retaining this sole term leads to a divergence of the second-order correction at higher wave numbers. This is explained by the fact that the second-order spectrum (fourth order in surface amplitude) is not complete, since it misses the contribution of the $h_1 \times h_3$ term.

4.4. Creamer Theory

[47] In order to generate nonlinear sea surfaces *Creamer et al.* [1989] uses a canonical transformation of physical variables (surface elevation and potential) in order to improve the accuracy of the Hamiltonian expansion. This transformation has the same domain of validity of the CWM in a sense that it can be used for surface gravity waves and reproduces the effects of the lowest-order nonlinearities for the first-order development of the transformation. The 3-D

formulation remains, however, quite involved and its numerical implementation require further approximations [*Soriano et al.*, 2006]. In the 2-D Creamer model, the nonlinear process \tilde{h} is given by:

$$\tilde{h}(x) = h(x) + \delta h(x), \quad (90)$$

where the corrective term δh is expressed by its Fourier transform

$$\hat{\delta h}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \left(\frac{e^{ikD} - 1}{|k|} - i \operatorname{sign}(k) D \right) \quad (91)$$

and D is the Hilbert transform of h . This expression is unpractical for further analytical investigation. However, at low frequencies ($kD \ll 1$) the exponential may be expanded,

$$\hat{\delta h}(k) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \left(-\frac{|k|}{2} D^2 - \frac{i}{6} k^2 \operatorname{sign}(k) D^3 \right), \quad (92)$$

leading to the lowest-order approximation for the dressed spectrum [*Creamer et al.*, 1989, equation 6.11]:

$$\tilde{\Gamma}(k) = \Gamma(k) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dk' [k^2 \Gamma(k') \Gamma(k - k') - 2k^2 \Gamma(k) \Gamma(k')] \quad (93)$$

This expression is similar to the first integral in the low-frequency expansion (29). Figure 11 displays a comparison of *Creamer et al.*'s [1989], *Weber and Barrick*'s [1977] and CWM low-frequency expansion, for an omnidirectional k^{-3} spectrum with exponential cutoff at peak frequency $kp = 0.7 \text{ rad m}^{-1}$ (corresponding to a wind of 3 m s^{-1}) and upper limit $k_u = 120 \text{ rad m}^{-1}$. The undressed (linear) spectrum is shown together with the corrections brought by the dressed spectrum. *Creamer et al.*'s [1989] and CWM expansions are extremely close at low frequency but CWM eventually diverges at higher frequency ($k > 100 \text{ rad m}^{-1}$). *Weber and Barrick* [1977] diverge very early ($k > 3 \text{ rad m}^{-1}$) and is slightly higher than CWM and *Creamer et al.*'s [1989] corrections.

5. Comparison With Experimental Data

[48] The reference data basis for the sea wave slope distribution is the optically derived measurement of *Cox and Munk* [1954], which has been used to calibrate many models of the literature. Since the CWM in its current state is restricted to gravity waves only, it cannot describe the scales smaller than, say 5 cm, and the related slopes, making the comparison with Cox and Munk data irrelevant. Instead, we will resort to a recent airborne campaign [*Vandemark et al.*, 2004], which has provided laser measurements of the omnidirectional slope statistics of long gravity waves. This amounts to filter out in the slope statistics the contribution of wavelengths smaller than about 2 m and renders the comparison with the CWM possible. The main outcome of this study was an elevated kurtosis for the omnidirectional slope, a result that can be put on the account of either the strong directionality of the wavefield or its non-Gaussian character. We will investigate the respective contributions of

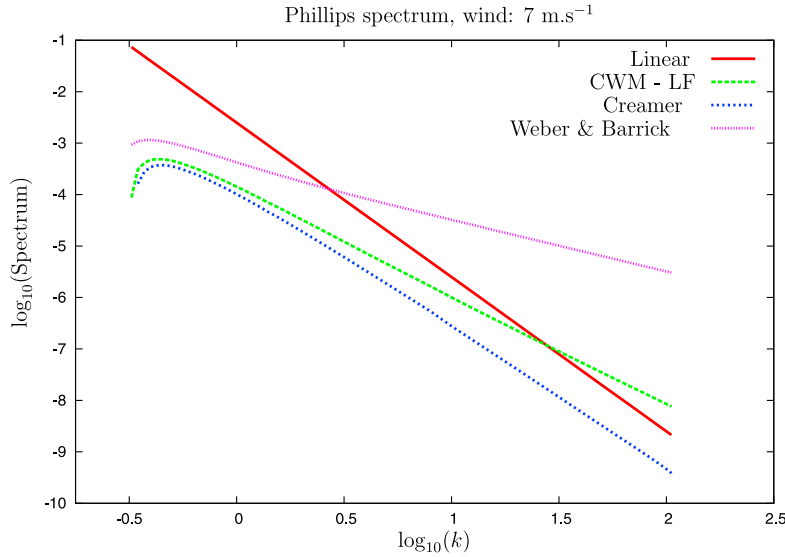


Figure 11. Comparison of *Creamer et al.*'s [1989], *Weber and Barrick*'s [1977], and CWM low-frequency expansions for the corrective term to the undressed spectrum.

these two effects in the framework of the CWM. Denote $P_{2-omni}(S)$ the omnidirectional slope distribution, that is the distribution of absolute magnitude of slope $S = |\nabla \mathbf{h}|$. For an isotropic Gaussian distribution with variance σ_2^2 , this is a Rayleigh distribution with parameter σ_2 ,

$$P_{2-omni}(S) = \frac{S}{\sigma_2^2} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad (94)$$

whose kurtosis is $\lambda'_4 = 3.245$. For a directional Gaussian slope distribution with upwind/crosswind mean square slope (mss) ratio $\rho^2 = \sigma_{200}^2/\sigma_{020}^2$ and total mss σ_2^2 , the n th moments $M_n = \langle S^n P_{omni}(S) \rangle$ of the omnidirectional slope distributions are found to be:

$$M_n = \frac{\sigma_2^n}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} d\theta \left[\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \right]^{-(1+n/2)} R_n \quad (95)$$

where R_n is the n th moment of the normalized Rayleigh distribution ($S \exp(-S^2/2)$). The variation of kurtosis with the directionality parameter ρ can be estimated numerically. A maximum value $\lambda'_4 = 4.166$ is reached at $\rho = 3$, while the minimum kurtosis is obtained at $\rho = 1$ for the Rayleigh distribution ($\lambda_4 = 3.245$). It follows that the elevated values of kurtosis reported by *Vandemark et al.* [2004], which ranges from 4.5 to 6, cannot be explained by mere directional effects of the slope distribution.

[49] The kurtosis has been computed as a function of wind speed for both linear and CWM surfaces generated with a directional Elfouhaily (undressed) spectrum. The fourth moment of the theoretical CWM slope distribution is in principle infinite, but the corresponding integral can be shown to have a slow, logarithmic divergence. Therefore, the slope distribution has been truncated to a maximum value of 1.7, corresponding to a steep wave of about 60 degree. For

small and moderate winds ($U_{10} \leq 12 \text{ m s}^{-1}$), the resulting fourth moment is quite insensitive to the chosen threshold. Furthermore, we have checked that the lack of normalization of the slope distribution after truncation has a negligible impact on the computation of the first cumulants. At higher winds, the slope kurtosis is found to increase slightly with the slope threshold. However, we do not expect the CWM to remain meaningful for steep waves. The simulated excess kurtosis is shown on Figure 12 and compared with recorded data. To reproduce the filtering of small waves slopes realized in the paper by *Vandemark et al.* [2004], the Elfouhaily spectrum has been truncated to a maximum wave number of $k_u = 6 \text{ rad m}^{-1}$. The corresponding surfaces are referred to as “long gravity waves.” The comparison is given with the untruncated gravity waves Elfouhaily spectrum ($k_u = 200 \text{ rad m}^{-1}$). The horizontal line at $\gamma = 0.245$ is the excess kurtosis of the Rayleigh distribution, obtained for Gaussian isotropic slope distribution. The line at $\gamma = 0.7$ is the estimation of *Cox and Munk* [1954], which is insensitive to wind and identical for slick and clean surfaces. The inclusion of nonlinearities through the CWM drastically increases the excess kurtosis and brings it to values intermediate between *Vandemark et al.*'s [2004] data and *Cox and Munk*'s [1954] data, while the linear model remains closer to the Rayleigh distribution.

6. Conclusion

[50] As reported, CWM provides an analytically tractable, numerically efficient solution to approach the geometrical description of nonlinear surface waves. CWM is also robust to the inclusion of high frequencies. CWM explicitly builds on a phase perturbation method to modify the surface coordinates, and statistical properties can be derived. We establish the complete first- and second-order statistical properties of surface elevations and slopes for long-crested

C09012

NOUGUIER ET AL.: CHOPPY WAVE MODEL FOR GRAVITY WAVES

C09012

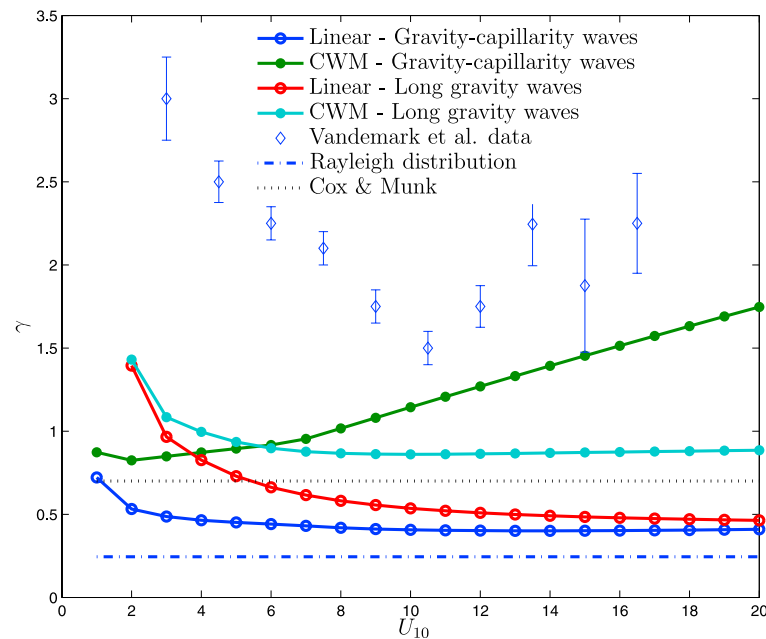


Figure 12. Excess kurtosis of the omnidirectional slopes as a function of wind speed.

as well as fully two-dimensional surfaces. As compared to standard approximation, the CWM is shown to be a reasonably accurate model for weak nonlinear gravity-wave interactions. It is based on the local deformation of a reference Gaussian process and the first few cumulants up to fourth order can be expressed in terms of the underlying Gaussian statistics. Relations between dressed and undressed spectra have been established and found to favorably extend the classical low-frequency formulations of *Weber and Barrick* [1977] and *Creamer et al.* [1989].

[51] As already pointed out [Elfouhaily et al., 1999], it can be crucial to determine the required input undressed spectrum for which the simulated moments remain consistent with a measured spectrum. The CWM can then be used to define an inversion scheme to consistently evaluate the first-order cumulants (elevation skewness, the elevation and slope cross skewness) to evaluate the predicted long wave geometrical contribution to altimeter sea state bias [Elfouhaily et al., 2000; Vandemark et al., 2005].

[52] Moreover, the nonlinear surface wave geometry with shallow troughs and enhanced crests, implies an excess of both zero and steep slope occurrences. As numerically derived, CWM predictions unambiguously confirm that bound harmonics associated to the simplified surface coordinate changes will indeed lead to non negligible surface slope kurtosis. Compared to measurements, CWM is found to help to bridge the differences between a linear Gaussian model and reported large slope kurtosis.

[53] For short gravity waves, the CWM can also be used to heuristically introduce the skewness of individual slopes. These effects can indeed be subsequently incorporated in the model through a generalization of the horizontal displacement $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ to steepen slightly the forward face of individual

waves, especially when the local steepness exceeds a threshold value.

[54] **Acknowledgments.** Frédéric Nouguier is funded by the Délégation Générale pour l'Armement (DGA) under the supervision of Y. Hurtaud. Many thanks go to Philippe Forget for his careful reading of the paper.

References

- Aberg, S. (2007), Wave intensities and slopes in Lagrangian seas, *Adv. Appl. Prob.*, 39(4), 1020–1035.
- Barrick, D. E., and B. L. Weber (1977), On the nonlinear theory for gravity waves on the ocean's surface. Part II: Interpretation and applications, *J. Phys. Oceanogr.*, 7, 11–21.
- Chalikov, D. (2005), Statistical properties of nonlinear one-dimensional wave fields, *Nonlinear Process. Geophys.*, 12(5), 671–689.
- Chalikov, D., and D. Sheinin (2005), Modeling extreme waves based on equations of potential flow with a free surface, *J. Comput. Phys.*, 210, 247–273.
- Chapron, B., V. Kerbaol, D. Vandemark, and T. Elfouhaily (2000), Importance of peakedness in sea surface slope measurements and applications, *J. Geophys. Res.*, 105, 17,195–17,202.
- Cox, C., and W. Munk (1954), Statistics from the sea surface derived from the sun glitter, *J. Mar. Res.*, 13, 198–227.
- Creamer, D., F. Henyey, R. Schult, and J. Wright (1989), Improved linear representation of ocean surface waves, *J. Fluid Mech.*, 205, 135–161.
- Dias, F., and T. J. Bridges (2006), The numerical computation of freely propagating time-dependent irrotational water waves, *Fluid Dyn. Res.*, 38, 803–830.
- Elfohaily, T. (2000), Truncated Hamiltonian versus surface perturbation in nonlinear waves theories, *Waves Random Media*, 10, 103–116.
- Elfohaily, T., B. Chapron, K. Katsaros, and D. Vandemark (1997), A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves, *J. Geophys. Res.*, 102, 15,781–15,796.
- Elfohaily, T., D. Thompson, D. Vandemark, and B. Chapron (1999), Weakly nonlinear theory and sea state bias estimation, *J. Geophys. Res.*, 104, 7641–7647.
- Elfohaily, T., D. Thompson, B. Chapron, and D. Vandemark (2000), Improved electromagnetic bias theory, *J. Geophys. Res.*, 105, 1299–1310.
- Fournier, A., and W. T. Reeves (1986), A simple model of ocean waves, *Comput. Graphics*, 20(4), 75–84.

C09012

NOUGUIER ET AL.: CHOPPY WAVE MODEL FOR GRAVITY WAVES

C09012

- Fructus, D., D. Clamond, J. Grue, and Ø. Kristiansen (2005), An efficient model for three-dimensional surface wave simulations: Part I: Free space problems, *J. Comput. Phys.*, **205**, 665–685.
- Gerstner, F. (1809), Theorie der wellen samt einer daraus abgeleiteten theorie der deichprofile, *Ann. Phys.*, **2**, 412–445.
- Gjosund, S. (2003), A Lagrangian model for irregular waves and wave kinematics, *J. Offshore Mech. Arctic Eng.*, **125**, 94–102.
- Hasselmann, K. (1962), On the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory, *J. Fluid Mech.*, **12**, 481–500.
- Joelson, M., and M. Néel (2008), On alpha stable distribution of wind driven water surface wave slope, *Chaos*, **18**, 033117.
- Longuet-Higgins, M. (1963), The effects of non-linearities on statistical distributions in the theory of sea waves, *J. Fluid Mech.*, **17**, 459–480.
- Papoulis, A. (1965), *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, pp. 153–162, McGraw-Hill, Boston, Mass.
- Pierson, W. (1961), Models of random seas based on the Lagrangian equations of motion, *Tech. Rep. Nonr-285(03)*, Dep. of Meteorol. and Oceanogr., Coll. of Eng. Res. Div., N. Y. Univ., New York.
- Pierson, W. (1962), Perturbation analysis of the Navier-Stokes equations in Lagrangian form with selected linear solutions, *J. Geophys. Res.*, **67**, 3151–3160.
- Ruban, V. (2005), Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows, *Phys. Lett. A*, **340**(1–4), 194–200.
- Soriano, G., M. Joelson, and M. Saillard (2006), Doppler spectra from a two-dimensional ocean surface at L-band, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, **44**(9), 2430–2437.
- Srokosz, M., and M. Longuet-Higgins (1986), On the skewness of sea-surface elevation, *J. Fluid Mech.*, **164**, 487–497.
- Stokes, G. (1847), On the theory of oscillatory waves, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **8**(441), 197–229.
- Stokes, G. (1880), Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves, *Math. Phys. Pap.*, **1**, 225–228.
- Tayfun, M. (1980), Narrow-band nonlinear sea waves, *J. Geophys. Res.*, **85**, 1548–1552.
- Tayfun, M. A., and F. Fedele (2007), Wave-height distributions and non-linear effects, *Ocean Eng.*, **34**, 1631–1649.
- Tick, L. (1959), A non-linear random model of gravity waves, *J. Math. Mech.*, **8**(5), 643–651.
- Toffoli, A., E. Bitner-Gregersen, M. Onorato, and A. Babanin (2008), Wave crest and trough distributions in a broad-banded directional wave field, *Ocean Eng.*, **35**, 1784–1792.
- Vandemark, D., B. Chapron, J. Sun, G. Crescenti, and H. Graber (2004), Ocean wave slope observations using radar backscatter and laser altimeters, *J. Phys. Oceanogr.*, **34**, 2825–2842.
- Vandemark, D., B. Chapron, T. Elfouhaily, and J. Campbell (2005), Impact of high-frequency waves on the ocean altimeter range bias, *J. Geophys. Res.*, **110**, C11006, doi:10.1029/2005JC002979.
- Watson, K., and B. West (1975), A transport-equation description of non-linear ocean surface wave interaction, *J. Fluid Mech.*, **10**, 815–826.
- Weber, B., and D. Barrick (1977), On the nonlinear theory for gravity waves on the ocean's surface. Part I: Derivations, *J. Phys. Oceanogr.*, **7**, 3–10.
- West, B. J., K. A. Brueckner, R. S. Janda, D. M. Milder, and R. L. Milton (1987), A new numerical method for surface hydrodynamics, *J. Geophys. Res.*, **92**, 11,803–11,824.
- Zakharov, V. (1968), Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys. Engl. Transl.*, **2**, 190–194.
- Zakharov, V., A. Dyachenko, and O. Vasilyev (2002), New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface, *Eur. J. Mech. B Fluids*, **21**(3), 283–291.

B. Chapron, Laboratoire d'Océanographie Spatiale, IFREMER, Zone 1 Industrielle Pointe du Diable, B.P. 70, F-29280 Plouzané, France.
 C.-A. Guérin, LSEET, UMR 6017, Université du Sud-Toulon-Var, CNRS, B.P. 20132, F-83957 La Garde CEDEX, France.
 F. Nougier, Institut Fresnel, UMR 6133, Faculté de Saint-Jérôme, Université Paul Cézanne, CNRS, F-13397 Marseille CEDEX 20, France. (frederic.nougier@fresnel.fr)

Scattering from nonlinear gravity waves: the “choppy wave” model

Frédéric Nouguier

Institut Fresnel, UMR CNRS 6133, and Université Paul Cézanne, case 162 Faculté de Saint-Jérôme, F-13397 Marseille cedex 20

Charles-Antoine Guérin

LSEET, UMR CNRS 6017, and Université du Sud-Toulon-Var, Avenue de l'Université, BP 20132 F-83957 La Garde cedex

Bertrand Chapron

IFREMER, Laboratoire d'Océanographie Spatiale, 29280 Plouzané, France

Abstract: To progress in the understanding of the impact of nonlinear wave profiles in scattering from sea surfaces, a nonlinear model for infinite depth gravity waves is considered. This model, termed the “Choppy Wave Model” (CWM), is based on horizontal deformation of a linear, reference random surface. It is numerically efficient and enjoys explicit second-order statistics for heights and slopes, which makes it well adapted to a large family of scattering models. We incorporate the CWM into a Physical Optics approximation and derive statistical expressions for the corresponding incoherent cross section. We insist on the importance of “undressing” the wavenumber spectrum to generate a nonlinear surface with a prescribed spectrum. Interestingly, the inclusion of nonlinearities is found to be practically compensated by the spectral undressing process. Accordingly, the difference between the respective NRCS is rather small. The most noticeable changes are an increased directionality of the azimuthal variations and a slight increase of the radar returns at nadir. However, this can induce a strong bias in the estimation of the mean square slope and curvature of the surface from a Geometrical Optics type expansion about nadir. Finally, we discuss heuristic arguments to estimate the change in NRCS which is induced by curvature corrections in the nonlinear framework of the CWM.

1. Introduction

The modeling of electromagnetic wave scattering from sea surfaces has been a constantly evolving field of research since more than half a century *Elfouhaily and Guérin* [2004], triggered by a large number of ocean remote sensing applications. For near-nadir geometry, radar backscattering measurements exhibit very little polarization dependency but some evidences of frequency sensitivity. Accordingly, the Physical Optics (PO) or Kirchhoff approximation has been invoked to interpret radar backscatter measurements (e.g. *Mouche et al.* [2007]).

As this scattering model approximation can certainly be used, it becomes all the more crucial to combine it with an accurate statistical description of the sea surface. In particular, one key issue is to take into account the nonlinearity of surface waves and the resulting non-Gaussian heights and slopes distributions.

Excepted for the Bragg scattering approximation for the normalized radar cross-section (NRCS), the aforementioned PO scattering solutions, as well as other more elaborated scattering models, all have in common to directly depend upon the two-points characteristic function of elevations. In the case of a Gaussian distribution, the characteristic function can simply be expressed in terms of the correlation function. To incorporate non-Gaussian effects in scattering calculations, third or fourth order cumulant functions, which involve the so-called skewness and peakedness functions, must be considered. These functions are generally unknown and have only been treated in the limit of geometrical optics, by fitting their asymptotic form around zero with the coefficients appearing in the Cox and Munk non-Gaussian

slope distribution. *Ad hoc*, rather arbitrary, analytical expressions have then been assumed for the functions away from zero (*Chen et al.* [1992, 1993]; *Bourlier* [2004]; *Mouche et al.* [2007]). Other attempts have been made to incorporate the geometrical effect of steep (but non-breaking) waves in approximate scattering models through a modification of the shadowing function *Fuks and Voronovich* [2002] or the facet slope distribution in the Two-scale Model *Nickolaev et al.* [1991]. Another approach is purely numerical and consists in a Monte-Carlo average of the NRCS on a large number of nonlinear samples sea surfaces *Johnson et al.* [2001]; *Hayslip et al.* [2003]; *Soriano et al.* [2006]; *Johnson et al.* [2009] but remains often limited to 1D-surfaces or small sea patches.

Recently, the authors *Nouguier et al.* [2009] analyzed a simple and versatile weakly nonlinear (WNL) sea surface model for infinite depth gravity waves, based on perturbative expansions in Lagrangian coordinate. At first order in curvature, this representation, called the Choppy Wave Model (CWM), is found equivalent to other existing WNL solutions. Moreover, CWM is numerically efficient and enjoys explicit second-order statistics. CWM is thus particularly well adapted to the calculation of NRCS involving the two-point characteristic function. A similar Lagrangian model was already considered in the framework of a PO approximation *Engen et al.* [2006]. However, a crucial aspect was seemingly omitted. Indeed, a preliminary step which we refer to as the “undressing procedure” of the spectrum (section 3), is essential to consider. This step enables ones to generate nonlinear waves with a prescribed spectrum, to provide “fair” comparisons between the NRCS from linear and nonlinear waves (section 4). As we will show, the undressing effect partly cancels the augmentation of NRCS due to more peaky waves. Yet, a modified azimuthal behavior of the NRCS and a modified GO expansion at nadir is obtained. This latter aspect can result in strong bias in the estimation of the surface mean square slope and curvature

X - 2

NOUGUIER ET AL.: SCATTERING FROM NONLINEAR GRAVITY WAVES

from radar observations. Accordingly, the present study can thus help to better interpret the slope probability density function of the ocean waves from radar observations, as recently discussed by *Hauser et al.* [2008, 2009] and *Hwang* [2009].

2. The choppy waves model

The terminology of the CWM originates from the choppy aspect of the waves generated by this technique. The model is not properly new, as it has been used for years by the computer graphics community (*Fournier and Reeves* [1986]; *Tessendorf* [2004]) in a phenomenological description of ocean waves. Also, it has been recognized *Nouguier et al.* [2009] to coincide with the first order Lagrangian expansion of *Pierson W.J. Pierson* [1962, 1961]. Unlike most WNL models, the CWM is based on horizontal, instead of vertical, deformation of a reference linear surfaces. Assuming a representation of the linear sea surface by a function $z = h(\mathbf{r}, t)$, where $\mathbf{r} = (x, y)$ is the horizontal coordinate, the CWM is obtained by the following transformation:

$$(\mathbf{r}, h(\mathbf{r}, t)) \mapsto (\mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), h(\mathbf{r}, t)) \quad (2.1)$$

where $\mathbf{r} = (x, y)$ is the horizontal coordinate,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{h}(\mathbf{k}, t) i\mathbf{k} \quad (2.2)$$

is the so-called Riesz Transform of the function h , and

$$\hat{h}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} h(\mathbf{r}, t) \quad (2.3)$$

its two-dimensional spatial Fourier transform. A complete statistical description of the resulting process has been established in *Nouguier et al.* [2009], whenever the reference surface is a stationary centered Gaussian process. We hereafter recall the few properties which are useful for the following. Equation (2.1) implicitly defines a modified process $\tilde{h}(\mathbf{r}, t)$, which has been shown to possess non-Gaussian height and slope distributions, as well as a modified spectrum. In the whole article the tilde superscript will be used for quantities depending on the nonlinear process. Denoting $C(\mathbf{r}) = \langle h(\mathbf{r}, t) h(\mathbf{0}, t) \rangle$ the correlation function of the linear process h and Γ its spectrum, i.e. the Fourier transform of the latter, the following relation has been established for the quantities \tilde{C} and $\tilde{\Gamma}$ pertaining to the modified process:

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left\{ -(\sigma_1^4 - \sigma_0^2) e^{-k^2 \sigma_k^2} + \left[\frac{-S_0}{2} (1 - \Delta C - 2i\mathbf{k} \cdot \nabla C - (\mathbf{k} \cdot \nabla C)^2) + \frac{S_1^2}{4} \right] e^{-\frac{k^2}{2} \Phi_k} \right\} \quad (2.4)$$

Here the dependence in the space variable is implicit and ∇C and ΔC are respectively the gradient and the Laplacian of the correlation function and $S_0(\mathbf{r}) = 2[C(0) - C(\mathbf{r})]$ is the structure function. The auxiliary functions Φ_u and S_1 are defined by:

$$S_1(\mathbf{r}) = 2 \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{k}' k' \Gamma(\mathbf{k}') [1 - e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}}] \quad (5)$$

and

$$\Phi_u(\mathbf{r}) = 2 \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{k}' (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \Gamma(\mathbf{k}') [1 - e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}}] \quad (6)$$

and the quantities σ_n^2 are the absolute moments of the spectrum:

$$\sigma_n^2 = \int_{\mathbb{R}^2} k'^n \Gamma(\mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad \sigma_u^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \Gamma(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' \quad (7)$$

At low frequencies, the exponential can be linearized, leading *Nouguier et al.* [2009] to the following expansion at the leading order in $k\sigma_0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\mathbf{k}) = & \Gamma(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} |\mathbf{k}|^2 \int d\mathbf{k}' \Gamma(\mathbf{k}') \left\{ \Gamma(\mathbf{k}'') - 2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \Gamma(\mathbf{k}') \right\} \\ & + \int d\mathbf{k}' |\mathbf{k}'| \Gamma(\mathbf{k}') \Gamma(\mathbf{k}'') |\mathbf{k}''| \left[(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'')^2 - \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'' \right] \\ & - 2 \int d\mathbf{k}' |\mathbf{k}| |\mathbf{k}'| (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \Gamma(\mathbf{k}') \Gamma(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (8)$$

where $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$. This last formula can be advantageously used for numerical computations as it involves monotonic functions which are much easier integrate than oscillating functions. Also, it implies the sole sea spectrum, which is usually more explicit than the corresponding correlation function.

3. Undressing the spectrum

3.1. Dressed and undressed spectra

Following a terminology introduced by *Elfouhaily et al.* [1999] and *Soriano et al.* [2006] we will refer to the “dressed” spectrum to denote the spectrum which is actually measured experimentally on the true ocean surface, including nonlinearities (\tilde{h}). The “bare” or “undressed” spectrum pertains to the linear surface that underlies the non-linear process (h). The dressed spectrum has a richer high-frequency content than the undressed one, as a side effect of the crests sharpening induced by the nonlinear deformation. One of the major difficulties in using nonlinear models based on transformation of a reference process is to control the dressed spectrum at high frequencies. For this, it is necessary to rely on a relationship such as (2.4) between dressed and undressed quantities, an equation which we will call a “dressing formula”. Inverting this formula allows one to “undress” the expected spectrum and therefore to dispose of a suitable reference linear surface for the generation of a nonlinear surface with prescribed spectrum. An undressing procedure was already operated by *Elfouhaily et al.* [1999] to retrieve the lowest-order cumulants of the non-linear surface. In *Soriano et al.* [2006], a power-law form for the high-frequency part of the undressed spectrum was postulated, and the parameters were fitted in such a way that the dressed spectrum leads to the correct values of the mean square height and slope after the nonlinear transformation proposed by *Creamer et al.* [1989].

In the following, a second harmonic azimuthal expansion will be assumed for the dressed spectrum:

$$2\pi k^4 \tilde{\Gamma}(\mathbf{k}) = \tilde{B}(k) (1 + \tilde{\Delta}(k) \cos(2\phi_k)) \quad (9)$$

where \tilde{B} and $\tilde{\Delta}$ are the omnidirectional curvature and spreading functions, and ϕ_k is the azimuthal angle of \mathbf{k} with respect to the wind direction ϕ_{wind} . The same form will be retained for the undressed spectrum (neglecting possibly higher harmonics), for some other functions B and Δ . Note that the curvature and spreading functions can be obtained from the evaluation of the spectrum at three angles ($\phi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$):

$$\tilde{B}(k) = k^4 \frac{\tilde{\Gamma}_{\phi=0}(k) - \tilde{\Gamma}_{\phi=\pi/2}(k)}{\tilde{\Gamma}_{\phi=0}(k) + \tilde{\Gamma}_{\phi=\pi/2}(k)} \quad \text{and} \quad \tilde{\Delta}(k) = \frac{\tilde{\Gamma}_{\phi=0}(k) - \tilde{\Gamma}_{\phi=\pi/4}(k)}{\tilde{\Gamma}_{\phi=0}(k) + \tilde{\Gamma}_{\phi=\pi/2}(k)} \quad (10)$$

The integral involved in the dressing formula (2.4) requires careful and efficient numerical integration. A delicate task is the computation of the correlation functions and

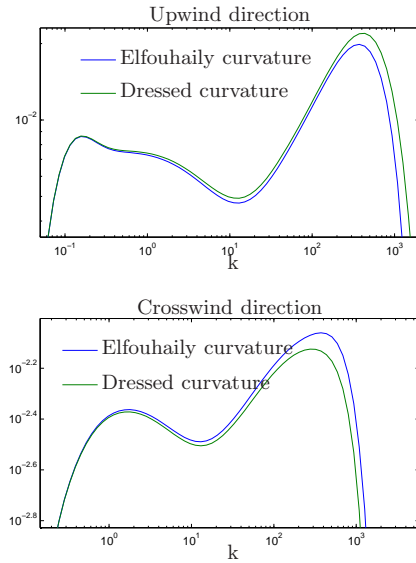


Figure 1. Elfouhaily directional curvature and its dressed version ($U_{10} = 11 \text{ m.s}^{-1}$)

related functions. For second-harmonic spectra, a general procedure using polar coordinates is given in the Appendix. Another difficulty is the precise evaluation of the oscillating integral. This turns out to be easier at large frequencies ($k\sigma_0 \gg 1$) because the damping effect of the exponential reduces the effective domain of integration and limits the number of oscillations of the effective integrand. At low-frequencies ($k\sigma_0 \ll 1$), the specific formula (8) can be car-

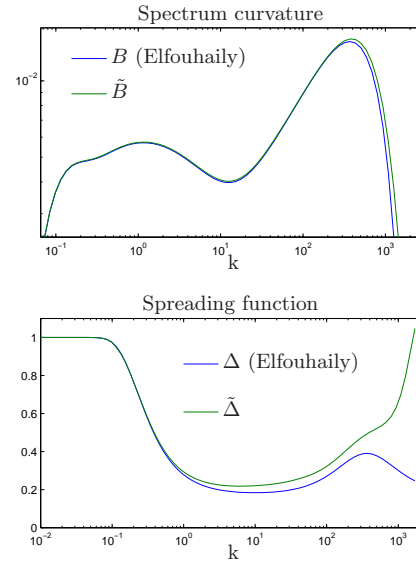


Figure 3. Elfouhaily omnidirectional curvature and spreading function and their dressed versions ($U_{10} = 11 \text{ m.s}^{-1}$)

ried out in a straightforward way. The most problematic regime is a small, intermediate domain where $k_0\sigma_0 \sim 1$. We have merely skipped the computation of the dressed spectrum in that interval. The dressed curvature and spreading function in this domain are inferred from the higher and lower frequency regimes by exponential interpolation of the dressing correction between both ends. Figure 1 shows the dressed directional curvature ($2\pi k^4 \tilde{\Gamma}(\mathbf{k})$) in both upwind and crosswind direction for the fully developed Elfouhaily spectrum *Elfouhaily et al.* [1997]. As one can see the transformation tends to increase the directionality of the spectrum by augmenting the contrast between the upwind and crosswind direction. This follows the expectations since the short waves are affected through nonlinear interaction by the longer ones which are strongly directional. Such interactions tend to align the short waves with the wind, increasing their own curvature. Spectrum energy is thus transferred from crosswind to upwind direction.

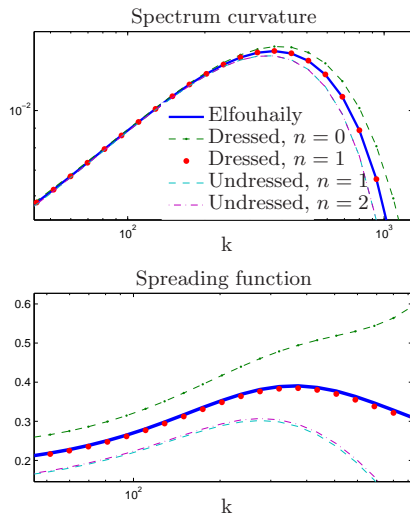


Figure 2. Undressing procedure ($U_{10} = 11 \text{ m.s}^{-1}$). The first iterations of the undressed curvature and spreading function are shown.

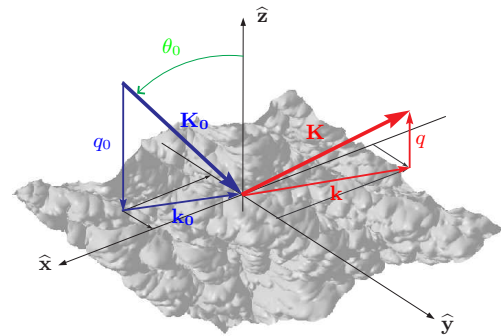


Figure 4. Geometry of the scattering problem

X - 4

NOUGUIER ET AL.: SCATTERING FROM NONLINEAR GRAVITY WAVES

Figure 3 shows the omnidirectional dressed curvature $\tilde{B}(k)$ and the dressed spreading function $\tilde{\Delta}(k)$ associated to an input fully developed Elfouhaily spectrum. Both quantities are clearly amplified at high frequencies, witnessing for the transfer of energy from large to small scales and the strengthening of directionality. The relative correction at low frequencies is negligible and not visible on the graph.

3.2. The undressing procedure

Undressing a prescribed directional spectrum, that is finding undressed curvature (B) and spreading (Δ) functions from given target spectrum ($\tilde{B}_{\text{target}}, \tilde{\Delta}_{\text{target}}$) can be achieved by a simple iterative procedure. The recursion runs as follows.

$$\begin{aligned} B^{(0)} &= \tilde{B}_{\text{target}}, \quad B^{(n+1)} = B^{(n)} - dB^{(n)}, \quad dB^{(n)} = \tilde{B}^{(n)} - \tilde{B}_{\text{target}} \\ \Delta^{(0)} &= \tilde{\Delta}_{\text{target}}, \quad \Delta^{(n+1)} = \Delta^{(n)} - d\Delta^{(n)}, \quad d\Delta^{(n)} = \tilde{\Delta}^{(n)} - \tilde{\Delta}_{\text{target}} \end{aligned}$$

The iterates are obtained through successive applications of formulas (2.4) and (10). The recursion converges in a few steps as can be seen on Figure 2 for the high frequency part of the spectrum in the case of a target Elfouhaily spectrum.

4. Physical Optics under the CWM

We will now study the scattering of electromagnetic waves from CWM sea surfaces in the framework of the Kirchhoff Approximation or Physical Optics (PO) approximation, a scattering model which will be referred to as “CWM-PO”. Consider an incident linearly polarized monochromatic plane wave $\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} \mathbf{E}_0$ impinging on the sea surface at incidence angle θ_0 and giving rise to a scattered field \mathbf{E}_s above the surface. The geometry of the problem is depicted on Figure 4.

As usual, a $e^{-i\omega t}$ time dependence is implicitly assumed. Following the standard notation, we decompose the wave vectors into horizontal and vertical components,

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{k}_0 - q_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{k} + q \hat{\mathbf{z}}, \quad (11)$$

with $q, q_0 > 0$ and $k_0^2 + q_0^2 = k^2 + q^2 = K^2 = (2\pi/\lambda)^2$. It is also convenient to introduce the Ewald vector $\mathbf{Q} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_0$ and its components $\mathbf{Q}_H = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$, $Q_z = q + q_0$. The scattering amplitude in the PO approximation writes:

$$\mathbb{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \mathbb{K} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} e^{iQ_z \tilde{h}(\mathbf{r})}, \quad (12)$$

where \mathbb{K} is a kernel depending on the frequency and the scattering angles. The expression of the kernels pertaining to the PO approximation can be found in the Appendix E of *Elfouhaily and Guérin* [2004]. The corresponding incoherent NRCS is given by:

$$\tilde{\Sigma}^{(0)} = 4\pi \left| \frac{\mathbb{K}}{Q_z} \right|^2 \tilde{\Psi}(\mathbf{Q}) \quad (13)$$

where the functional $\tilde{\Psi}$ is a function of the sole Ewald vector:

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{Q}) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} \left[\langle e^{iQ_z(\tilde{h}(\mathbf{r}) - \tilde{h}(\mathbf{0}))} \rangle - \left| \langle e^{iQ_z \tilde{h}(\mathbf{r})} \rangle \right|^2 \right] e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} \quad (14)$$

The idea to calculate this integral of the implicit function \tilde{h} is to perform the change of variable $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + \mathbf{D}(\mathbf{r})$ which turns the integrand into explicit quantities:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{Q}) &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} \left[\langle e^{iQ_z(h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{0})) + i\mathbf{Q}_H \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{r}) - \mathbf{D}(\mathbf{0}))} \rangle \right. \\ &\quad \left. \times |J(\mathbf{r})| |J(\mathbf{0})| - \left| \langle e^{iQ_z h(\mathbf{r}) + i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})} |J(\mathbf{r})| \rangle \right|^2 \right] \quad (15) \end{aligned}$$

Here I is the 2×2 identity matrix and J is the Jacobian matrix:

$$J(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 + \partial_x D_x(\mathbf{r}) & \partial_x D_y(\mathbf{r}) \\ \partial_y D_x(\mathbf{r}) & 1 + \partial_y D_y(\mathbf{r}) \end{bmatrix}$$

Discarding the quadratic terms in the Jacobian,

$$|J(\mathbf{r})| |J(\mathbf{0})| \approx (1 + \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})) (1 + \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{0})) \quad (17)$$

and using standard properties of Gaussian processes (e.g. *Papoulis* [1965]) we obtain after tedious but straightforward calculations the following expression for the functional $\tilde{\Psi}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{Q}) &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} \left[\exp \left(-\frac{Q_z^2}{2} S_0 - \frac{Q_H^2}{2} \Phi_{\mathbf{Q}_H} \right) \right. \\ &\quad \times \left(1 - 2i\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C - (\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C)^2 - \Delta C + \frac{Q_z^2}{4} S_1^2 \right) \\ &\quad \left. - (1 + Q_z^2 \sigma_1^4) e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} e^{-Q_H^2 \sigma_{\mathbf{Q}_H}^2} \right] \quad (18) \end{aligned}$$

We recall that the functions $\Phi_{\mathbf{Q}_H}$ and S_1 are defined in (6) and (5).

The numerical evaluation of this functional is performed in polar coordinates using the formulas given in the Appendix. For comparison we recall the classical expression of the functional Ψ for the reference linear sea surface:

$$\Psi(\mathbf{Q}) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} \left[\exp \left(-\frac{Q_z^2}{2} S_0 \right) - \exp(-Q_z^2 \sigma_0^2) \right] \quad (20)$$

The formula (19) simplifies significantly in the long-crested case. Assume the surface to be invariant along the direction perpendicular to the incidence plane, say the y direction. Then the above formula reduces to:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{Q}) &= \int_{\mathbb{R}} dx e^{iQ_H x} \left[\exp \left(-\frac{Q_z^2 S_0(x)}{2} \right) \right. \\ &\quad \times \left(1 - 2iQ_H C'(x) - (Q_H C'(x))^2 - C''(x) + \frac{Q_z^2}{4} S_1^2(x) \right) \\ &\quad \left. - (1 + Q_z^2 \sigma_1^4) e^{-Q_z^2 \sigma_0^2} \right] \quad (21) \end{aligned}$$

where $Q = \sqrt{Q_z^2 + Q_H^2}$ is the norm of the Ewald vector. After integration by parts the last expression is amenable in a more tractable form:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{Q}) &= \frac{Q_z^2}{Q^2} \int_{\mathbb{R}} dx e^{iQ_H x} \left(\frac{Q_z^2}{Q^2} - C''(x) \right) \\ &\quad \times \left[\exp \left(-\frac{Q_z^2}{2} S_0(x) \right) - \exp(-Q_z^2 \sigma_0^2) \right] \\ &\quad + \frac{Q_z^2}{4} \int_{\mathbb{R}} dx e^{iQ_H x} \left[S_1^2(x) \exp \left(-\frac{Q_z^2}{2} S_0(x) \right) \right. \\ &\quad \left. - 4\sigma_1^4 \exp(-Q_z^2 \sigma_0^2) \right] \quad (22) \end{aligned}$$

The most notable change of the CWM-PO with respect to the “linear” PO is a tilt of the angular dependence of the exponential $\exp(-Q^2 S_0)$, where the factor Q_z is replaced by Q . The main consequence is to accelerate the damping effect of the exponential as one leaves the specular direction. This is, however, compensated for by the undressing of the spectrum, which makes the input structure function S_0 actually smaller than the one which would be used under the linear assumption. Altogether, these subtle compensation

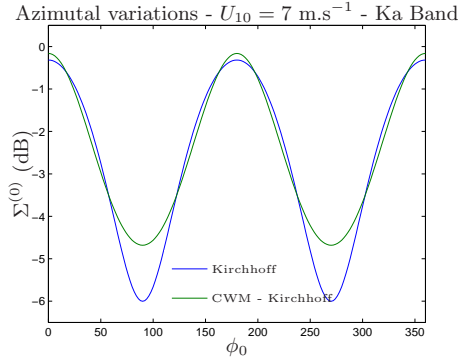


Figure 5. Azimuthal variation of the NRCS for a 20° incidence angle in Ka-Band for a 7 m.s⁻¹ wind speed

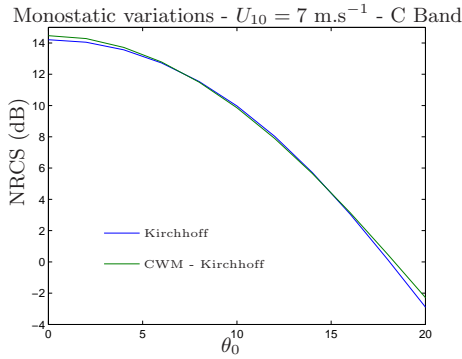


Figure 6. Monostatic variation of the NRCS. Upwind-wind configuration in C-Band for a 7 m.s⁻¹ wind speed.

effects make it difficult to predict the overall behavior of the CWM-PO model and conclusions will be drawn on the numerical trials (section 5).

The classical PO model for linear surfaces with directional Elfouhaily spectrum has been numerically compared with the CWM-PO model with undressed fully developed Elfouhaily spectrum. Figure 5 displays the azimuthal variation of the backscattering NRCS in Ka-Band ($f = 35$ GHz) for 7 m.s⁻¹ wind speed, at a fixed incidence angle (20°). The average level is increased by about one dB and the contrast between cross and upwind directions is reduced even if the variations are faster showing a stronger directional effect around the upwind direction.

Figure 6 shows the upwind monostatic variations of the NRCS in the same conditions. The difference between the two models is clear at nadir where the NRCS is increased by the order of a half dB. This results is in agreement with the qualitative expectations since the increase of NRCS at small angles can be put on the account of the flattening of troughs.

Even though the contrast between the linear and CWM is small in magnitude, it introduces an important bias when it comes to the estimation of the slope and curvature parameters of the surface from near-nadir measurements. This is the point of the next section.

4.1. CWM in the GO limit

In the high-frequency regime the integrand in (20) contributes to the NRCS mainly through its behavior around

zero. Therefore we can replace the involved functions by their Taylor expansion around the origin. For a second-harmonic spectrum of type (9), the fourth-order Taylor expansion of the correlation function can be written:

$$C(\mathbf{r}) = \sigma_0^2 - \frac{x^2}{2}\sigma_{2x}^2 - \frac{y^2}{2}\sigma_{2y}^2 + (x^2 + y^2) \left(\frac{x^2}{24}\sigma_{4x}^2 + \frac{y^2}{24}\sigma_{4y}^2 \right) \quad (23)$$

where x and y are the projections of \mathbf{r} in the upwind and crosswind directions, respectively, and

$$\sigma_{2x}^2 = \frac{\sigma_{2i}^2 + \sigma_{2a}^2/2}{2}, \quad \sigma_{2y}^2 = \frac{\sigma_{2i}^2 - \sigma_{2a}^2/2}{2}, \quad (24)$$

$$\sigma_{4x}^2 = \frac{(3/4)\sigma_{4i}^2 + \sigma_{4a}^2/2}{2}, \quad \sigma_{4y}^2 = \frac{(3/4)\sigma_{4i}^2 - \sigma_{4a}^2/2}{2} \quad (25)$$

Here σ_{ni}^2 and σ_{na}^2 are the n th order absolute moments of the isotropic and anisotropic part of the spectrum and are respectively given by:

$$\sigma_{ni}^2 = \int d\mathbf{k} k^n \frac{B(k)}{2\pi k^4}$$

$$\sigma_{na}^2 = \int d\mathbf{k} k^n \frac{B(k)\Delta(k)}{2\pi k^4}.$$

Note that these quantities are related to the total mean square slope (mss) σ_2^2 and curvature (mcs) σ_4^2 by:

$$\sigma_2^2 = \sigma_{2i}^2 = (\sigma_{2x}^2 + \sigma_{2y}^2) \quad (26)$$

$$\sigma_4^2 = \sigma_{4i}^2 = \frac{4}{3}(\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2) \quad (27)$$

The expansion (23) leads to a simplified expression for the NRCS:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{Q}) &= \frac{2\pi}{\sqrt{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2 Q_z^4}} \exp \left(\frac{Q_{Hx}^2}{2\sigma_{2x}^2 Q_z^2} + \frac{Q_{Hy}^2}{2\sigma_{2y}^2 Q_z^2} \right) \\ &\left\{ 1 + \frac{1}{24Q_z^2} \left[\frac{\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2}{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2} H_2 \left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z \sigma_{2x}^2} \right) H_2 \left(\frac{Q_{Hy}}{Q_z \sigma_{2y}^2} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\sigma_{4x}^2}{\sigma_{2x}^2} H_4 \left(\frac{Q_{Hx}}{Q_z \sigma_{2x}^2} \right) + \frac{\sigma_{4y}^2}{\sigma_{2y}^2} H_4 \left(\frac{Q_{Hy}}{Q_z \sigma_{2y}^2} \right) \right] \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

where the H_n are the Hermite polynomials and Q_{Hx} and Q_{Hy} are respectively the projections of \mathbf{Q}_H in the upwind and crosswind directions. We call this limiting form of the PO the Geometrical Optics (GO) approximation, even if the latter terminology is rather employed to designate the Gaussian function of $(Q_{Hx}/Q_z, Q_{Hy}/Q_z)$ which is obtained after a second-order Taylor expansion of the correlation function about the origin. Denoting θ the monostatic incidence angle and neglecting the $\tan^6(\theta)$ term in the above expression, we can write in the upwind direction:

$$\log \left(\frac{\cos^4(\theta) \Sigma^{(0)}(\theta)}{\Sigma^{(0)}(0)} \right) = A_{up} \tan^4(\theta) + B_{up} \tan^2(\theta) \quad (29)$$

with

$$A_{up} = \frac{1}{\sigma_{2x}^2} \frac{1}{96K^2} \left(-\frac{\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2}{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2} + \frac{\sigma_{4x}^2}{\sigma_{2x}^4} (1 - 6\sigma_{2x}^2) \right) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} B_{up} &= \frac{1}{\sigma_{2x}^2} \left[\frac{-1}{2} + \frac{1}{96K^2} \left(-\frac{\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2}{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2} (1 - \sigma_{2x}^2) + \right. \right. \\ &\left. \left. 3\frac{\sigma_{4x}^2}{\sigma_{2x}^2} (1 - 2\sigma_{2x}^2) + 3\frac{\sigma_{4y}^2}{\sigma_{2y}^2} \sigma_{2x}^2 \right) \right] \quad (31) \end{aligned}$$

Similar expressions are obtained in the crosswind configuration, with the permutation of σ_{2y}^2 and σ_{2x}^2 . Since the sea

X - 6

NOUGUIER ET AL.: SCATTERING FROM NONLINEAR GRAVITY WAVES

surface mss is much smaller than one, these coefficients can be simplified to:

$$A_{up} = \frac{1}{96K^2} \frac{\sigma_{4x}^2}{\sigma_{2x}^8} \quad (32)$$

$$B_{up} = -\frac{1}{\sigma_{2x}^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{96K^2} \frac{\sigma_{4x}^2 + \sigma_{4y}^2}{\sigma_{2x}^2 \sigma_{2y}^2} \right] \quad (33)$$

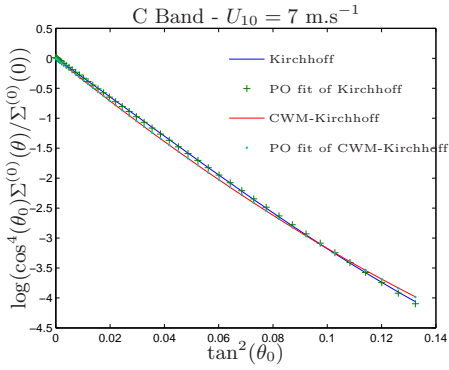


Figure 7. Fit of Kirchhoff scattering patterns by a PO

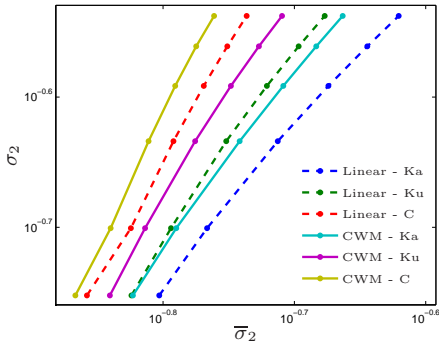


Figure 8. Total mss σ_2 as a function of filtered mss $\bar{\sigma}_2$ for both linear and CWM estimation. The six points on every line correspond to the different wind speed 5, 7, 9, 11, 13, 15 in increasing order.

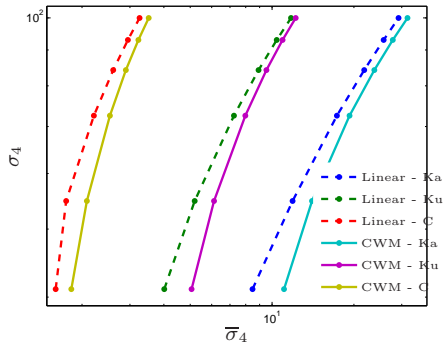


Figure 9. Same as figure 8 for the total msc σ_4 and filtered msc $\bar{\sigma}_4$.

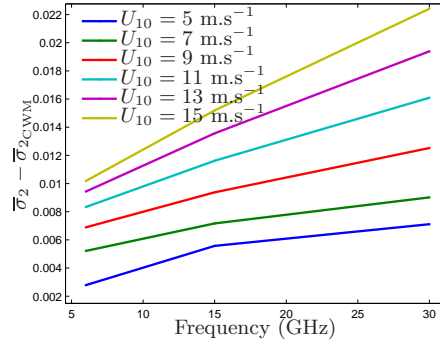


Figure 10. Bias on the estimation of the mss $\bar{\sigma}_2$ due to nonlinearities.

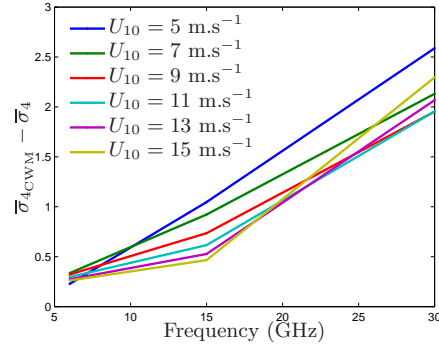


Figure 11. Bias on the msc $\bar{\sigma}_4$ due to nonlinearities.

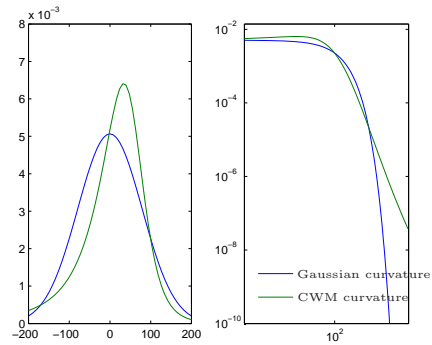


Figure 12. CWM curvature probability density function at a 10 m.s^{-1} wind speed. The Gaussian distribution is given as reference.

Using equations (26) and (27), this expression of GO in the high-frequency limit makes it possible to interpret the coefficients of a fit (29) in terms of total mss and msc:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{B_{up}} + \frac{1}{B_{cross}} \right) = \sigma_2^2 \quad (34)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} 8K^2 \left(\frac{A_{up}}{B_{up}^2} + \frac{A_{cross}}{B_{cross}^2} \right) = \sigma_4^2 \quad (35)$$

Now a fit of the form (29) can also be employed for the near-nadir monostatic diagram at *finite* wave number. As in equations (26) and (27), the fitting coefficients $(\bar{\sigma}_{nx}, \bar{\sigma}_{ny})$ and $(\bar{\sigma}_{nxCWM}, \bar{\sigma}_{nyCWM})$ derived respectively from the linear and nonlinear fits are used to define the filtered values of the mss and msc: $(\bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_4)$ for the linear model and $(\bar{\sigma}_{2CWM}, \bar{\sigma}_{4CWM})$ for the nonlinear model:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_2^2 = \bar{\sigma}_{2x}^2 + \bar{\sigma}_{2y}^2 \\ \bar{\sigma}_4^2 = \frac{4}{3}(\bar{\sigma}_{4x}^2 + \bar{\sigma}_{4y}^2) \end{cases} \quad (36)$$

and

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{2CWM}^2 = \bar{\sigma}_{2xCWM}^2 + \bar{\sigma}_{2yCWM}^2 \\ \bar{\sigma}_{4CWM}^2 = \frac{4}{3}(\bar{\sigma}_{4xCWM}^2 + \bar{\sigma}_{4yCWM}^2) \end{cases} \quad (37)$$

These quantities can be thought of as the mss and msc of the scales in the surface that effectively contribute to the scattering process, and tend to the total mss and msc in the optical limit where smallest scales have been uncovered by the probing wavelength. The necessity to consider filtered slopes evolving with the frequency band when it comes to GO was already discussed in detail in *Thompson et al.* [2005]. In addition to the frequency dependence of the slope filter, we will now also discuss the impact of nonlinearities on the latter.

The calculation of $\bar{\sigma}_2$ and $\bar{\sigma}_4$ has been performed for the PO NRCS (13) at different frequency bands and wind speed, for both the linear and CWM model. As an example, figure 7 shows the monostatic NRCS as a function of the $\tan^2 \theta$ variable at 7 m.s⁻¹ wind speed in C band (6 GHz), together with its quadratic fit (29) over the 20 first degrees. Figures 8 and 9 show the correspondence between the total mss σ_2 and msc σ_4 (vertical axis) as a function of the corresponding filtered values $\bar{\sigma}_2$ and $\bar{\sigma}_4$ for various wind speeds and frequency bands. For a given wind speed, hence a given *mss* (corresponding to an horizontal line on the graph), the filtered *mss* which is inferred from the fit of the NRCS after the CWM is smaller than the filtered *mss* inferred from the linear model. Conversely, an estimation of the total mss from its filtered value underestimates the latter in the linear case, the effect being more pronounced at higher frequencies, where the nonlinear effects are more and more pronounced. It goes the other way round for the msc, which is overestimated in the linear hypothesis. Figure 10 and 11 shows the bias on mss and msc introduced by nonlinearities.

5. Curvature-based scattering methods

The numerical trials have shown that the PO model, which is essentially sensitive to the slopes of the surface, has little sensitivity to the nonlinear features present in the CWM. The most visible effects are the augmentation of the large-angles cross-section, in accordance with the occurrence of steeper facets in the distribution of slopes, and a modified GO expansion around nadir, in accordance with the change of effective slopes. However, neither the level nor the directionality of the NRCS at moderate angles is affected significantly by the introduction of nonlinear features in the PO model. As to the polarization ratio, it remains the same hence still roughness independent.

Recently, a certain number of improved unified models have been introduced, under the impulse of the pioneering ideas of Elfouhaily *Elfouhaily et al.* [2003]; *Guérin et al.* [2004]; *Mouche* [2007], in order to bring curvature corrections to the classical Small-Slope Approximation *Voronovich* [1994] and PO models. The key role of the curvature in scattering from sea surface was underlined recently by *Mouche et al.* [2007] in the framework of the so-called Resonant Curvature Approximation (RCA). In particular it was shown that a curvature correction to the PO is necessary to obtain realistic polarization ratios. However, these curvature-based models are formally more complicated than the basic PO formulation and have been essentially limited to Gaussian surfaces (besides Gram-Charlier expansions as mentioned in the Introduction). The derivation of a statistical formulation of these models in the framework of the CWM is achievable but considerably more complex than the PO framework and will left for subsequent research. We would like, however, to give some heuristic arguments to point out the increased sensitivity of curvature-based models to the CWM. In the framework of WCA, LCA or RCA, the scattering amplitude is essentially given by:

$$S = S_{PO} + T(h) \quad (38)$$

where the functional T is seen in all three cases to be dimensionally consistent with a root mean square curvature (rmsc). Hence the relative correction of the NRCS to the PO approximation might be assumed proportional to the rmse. To have an estimate of the change of NRCS induced by the CWM, it thus suffices to evaluate the gain in curvature. For simplicity, we will consider the long-crested case only. Then the nonlinear CWM surface is implicitly defined by:

$$\tilde{h}(x + D(x)) = h(x) \quad (39)$$

By differentiation we have another implicit relation for the slope and curvature:

$$\begin{aligned} \tilde{h}'(x + D(x)) &= (1 + D'(x))^{-1} h'(x) \\ \tilde{h}''(x + D(x)) &= (1 + D'(x))^{-3} ((1 + D'(x)) h''(x) - D''(x) h'(x)) \end{aligned}$$

Even if the second moment of curvatures is unbounded, we can study their distribution. The technique which was employed in *Nouguier et al.* [2009] to calculate the slopes probability density function can be adapted to the derivation of the probability density function of curvatures, which is found under the form of an integral:

$$\tilde{P}_4(z) = \int_{\mathbb{R}^3} x_2^3 P^{(+)}(x_1, x_4) P^{(-)} \left(x_2 - 1, \frac{zx_2^3 + x_1x_4}{x_2} \right) dx_1 dx_2 dx_4 \quad (40)$$

where

$$P^{(\pm)}(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_2^2 \sigma_4^2 - \sigma_3^4}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{M}^{\pm} \mathbf{X} \right) \quad (41)$$

and

$$\mathbf{M}^{(\pm)} = \frac{1}{\sigma_2^2 \sigma_4^2 - \sigma_3^4} \begin{bmatrix} \sigma_4^2 & \pm \sigma_3^2 \\ \pm \sigma_3^2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Figure 12 shows the CWM curvature distribution at a 10 m.s⁻¹ wind speed for a fully developed 2D Elfouhaily spectrum.

The tail of the distribution is slowly decreasing with an infinite second moment. However, the values of the curvature exceeding some threshold are unphysical and the distribution must be truncated to realistic values. We have chosen

X - 8

NOUGUIER ET AL.: SCATTERING FROM NONLINEAR GRAVITY WAVES

a maximum admissible value of curvature corresponding to a curvatur radius of about 1 mm. We have checked that this has a negligible effect on the normalization of the distribution. At 10 m.s⁻¹ wind speed the relative augmentation of msc is about 50% with respect to the Gaussian case. This implies an augmentation of the rmse by 25%, and consequently an increase of the curvature correction in WCA/LCA/RCA models by the same amount with the respect to the linear case.

6. Conclusion

Measuring the impact of hydrodynamic nonlinearities on ocean remote sensing is a difficult and ongoing research topic, for which very few analytical models are available. In this paper, we have shown that the CWM introduced recently by the authors in a recent work is very well adapted to scattering calculations in the framework of the classical approximations, namely the PO and GO. We have underlined the importance of a preliminary spectral undressing of the surface when it comes to evaluating its scattering cross section. This allows to perform a “fair” comparison between linear and nonlinear surfaces and to separate the effect from increased small-scale roughness from the purely nonlinear features such as the modified shape of the waves. The main outcome is that the undressing process balances almost exactly the increase in scattering cross section due to the contribution of water waves nonlinearities, save for the near-nadir and grazing zones. The change of NRCS around nadir, however small, is sufficient to drastically impact the estimation of surface slopes and curvatures in a GO approximation. Discarding nonlinear features of the surfaces conducts to overestimate the slopes and underestimate the curvatures, the bias increasing with the frequency band. The present study has been limited to PO and GO approximations, which are slope-sensitive but not curvature scattering models. To take fully into account the more peaky character of nonlinear waves, it will be necessary to consider curvature-dependent scattering models. A preliminary heuristic discussion has been given, suggesting a probable increase in NRCS of the order of 25%.

7. Appendix: numerical evaluation of the Kirchhoff integrals

As it is well known, the oscillating integral defining the sea surface correlation function from the spectrum is difficult to evaluate and must be treated with a tight and adaptative sampling. The two-dimensional Fourier transform can be reduced to a single integral by expanding the spectrum in azimuthal harmonics and resorting to Bessel functions. In the following expressions, let us denote by $\phi_{\mathbf{k}}$, $\phi_{\mathbf{r}}$, $\phi_{\mathbf{Q}_H}$ the respective azimuthal angles of the horizontal vectors \mathbf{k} , \mathbf{r} , \mathbf{Q}_H with respect to the wind direction. For a second-harmonic spectrum

$$\Gamma(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-1} k^{-4} B(k) (1 + \Delta(k) \cos(2\phi_{\mathbf{k}})) \quad (42)$$

$$= \Gamma_0(k) + \Gamma_2(k) \cos(2\phi_{\mathbf{k}}) \quad (43)$$

the correlation function is also second-harmonic, $C(\mathbf{r}) = C_0(r) + C_2(r) \cos(2\phi_{\mathbf{r}})$ with:

$$C_0(r) = \int_0^\infty B(k) k^{-3} J_0(kr) dk, \quad (44)$$

$$C_2(r) = - \int_0^\infty B(k) k^{-3} J_2(kr) dk \quad (45)$$

The remaining functions involved in the integral (2.4) required for the evaluation of the NRCS ($\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C, \Delta C, S_1, \Phi_{\mathbf{Q}_H}$) can also be expressed advantageously in

polar coordinates, even though the resulting expressions are significantly more complicated. We detail the technique for one such function, the other derivations being analogous. Then we have:

$$\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{k} i (\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{k}) \Gamma(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (46)$$

$$= i Q_H \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi e^{i k r \cos(\phi_{\mathbf{k}} - \phi_{\mathbf{r}})} k dk d\phi_{\mathbf{k}} \quad (47)$$

$$\cos(\phi_{\mathbf{Q}_H} - \phi_{\mathbf{k}}) [\Gamma_0(k) + \Gamma_2(k) \cos(2\phi_{\mathbf{k}})]$$

$$= (\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C)_0(\mathbf{r}) + (\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C)_2(\mathbf{r})$$

with obvious notations. The first term can be recast in the form:

$$(\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C)_0(\mathbf{r}) = -Q_H \cos(\phi_{\mathbf{Q}_H} - \phi_{\mathbf{r}}) \mathcal{B}[k\Gamma_0; 1](r) \quad (48)$$

where $\mathcal{B}[f; n]$ is a Bessel transform of the radial function $f(k)$:

$$\mathcal{B}[f; n](r) = 2\pi \int_0^\infty f(k) J_n(kr) k dk \quad (49)$$

After some manipulations using trigonometric formulas, the second term can be rewritten:

$$(\mathbf{Q}_H \cdot \nabla C)_2 = \quad (50)$$

$$- \frac{Q_H}{2} [(\mathcal{B}[k\Gamma_2; 1](r) - \mathcal{B}[k\Gamma_2; 3](r)) \cos(\phi_{\mathbf{r}} - \phi_{\mathbf{Q}_H}) \cos(2\phi_{\mathbf{r}})$$

$$+ ((\mathcal{B}[k\Gamma_2; 1](r) + \mathcal{B}[k\Gamma_2; 3](r)) \sin(\phi_{\mathbf{r}} - \phi_{\mathbf{Q}_H}) \sin(2\phi_{\mathbf{r}})]$$

In the same way, we can derive:

$$C(\mathbf{r}) = \mathcal{B}[\Gamma_0; 0] - \mathcal{B}[\Gamma_2; 2] \cos(2\phi_{\mathbf{r}}) \quad (51)$$

$$\Delta C(\mathbf{r}) = -\mathcal{B}[k^2\Gamma_0; 0] + \mathcal{B}[k^2\Gamma_2; 2] \cos(2\phi_{\mathbf{r}}) \quad (52)$$

$$\Phi_{\mathbf{Q}_H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\mathcal{B}[\Gamma_0; 0] - \mathcal{B}[\Gamma_0; 2]) \cos^2(\phi_{\mathbf{Q}_H} - \phi_{\mathbf{r}}) \quad (53)$$

$$+ \frac{1}{2} (\mathcal{B}[\Gamma_0; 0] + \mathcal{B}[\Gamma_0; 2]) \sin^2(\phi_{\mathbf{Q}_H} - \phi_{\mathbf{r}})$$

$$- \frac{1}{2} \mathcal{B}[\Gamma_2; 2] \cos(2\phi_{\mathbf{r}})$$

$$+ \frac{1}{4} (\mathcal{B}[\Gamma_2; 0] + \mathcal{B}[\Gamma_2; 4]) \cos(2\phi_{\mathbf{r}} - 2\phi_{\mathbf{Q}_H}) \cos(2\phi_{\mathbf{r}})$$

$$+ \frac{1}{4} (\mathcal{B}[\Gamma_2; 0] - \mathcal{B}[\Gamma_2; 4]) \sin(2\phi_{\mathbf{r}} - 2\phi_{\mathbf{Q}_H}) \sin(2\phi_{\mathbf{r}})$$

$$C_1(\mathbf{r}) = \mathcal{B}[k\Gamma_0; 0] - \mathcal{B}[k\Gamma_2; 2] \cos(2\phi_{\mathbf{r}}) \quad (54)$$

Acknowledgments. Frédéric Nougier is funded by the Délégation Générale pour l'Armement (DGA), under the supervising of Y. Hurtaud.

References

- Bourlier, C. (2004), Azimuthal harmonic coefficients of the microwave backscattering from a non-gaussian ocean surface with the first-order ssa model, *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens.*, 42(11), 2600–2611.
- Chen, K., A. Fung, and D. Weissman (1992), A backscattering model for ocean surfaces, *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens.*, 30(4), 811–817.
- Chen, K., A. Fung, and F. Amar (1993), An empirical bispectrum model for sea surface scattering, *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens.*, 31(4), 830–835.
- Creamer, D., F. Henyey, R. Schult, and J. Wright (1989), Improved linear representation of ocean surface waves, *J. Fluid Mech.*, 205, 135–161.
- Elfouhaily, T., and C.-A. Guérin (2004), A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces, *Waves in Random and Complex Media*, 14(4), 1–40.

- Elfouhaily, T., B. Chapron, K. Katsaros, and D. Vandemark (1997), A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves, *J. Geophys. Res.*, **102**(C7), 15,781–15,796.
- Elfouhaily, T., D. Thompson, D. Vandemark, and B. Chapron (1999), Weakly nonlinear theory and sea state bias estimation, *J. Geophys. Res.*, **104**(C4), 7641–7647.
- Elfouhaily, T., S. Guignard, R. Awadallah, and D. R. Thompson (2003), Local and non-local curvature approximation: a new asymptotic theory for wave scattering, *Waves in Random Media*, **13**(4), 321–338.
- Engen, G., I. Friestad-Pedersen, H. Johnsen, and T. Elfouhaily (2006), Curvature effects in ocean surface scattering, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **54**(5), 1370–1379.
- Fournier, A., and W. T. Reeves (1986), A simple model of ocean waves, *Computer Graphics*, **20**(4), 75–84.
- Fuks, I., and A. Voronovich (2002), Radar backscattering from Gerstner's sea surface wave, *Waves in Random and Complex Media*, **12**(3), 321–339.
- Guérin, C.-A., G. Soriano, and T. Elfouhaily (2004), Weighted curvature approximation: numerical tests for 2D dielectric surfaces, *Waves in Random and Complex Media*, **14**(3), 349–363.
- Hauser, D., G. Caudal, S. Guimbard, and A. Mouche (2008), A study of the slope probability density function of the ocean waves from radar observations, *J. Geophys. Res.*, **113**.
- Hauser, D., G. Caudal, S. Guimbard, and A. Mouche (2009), Reply to comment by Paul A. Hwang on A study of the slope probability density function of the ocean waves from radar observations by D. Hauser et al., *Journal of Geophysical Research-Oceans*, **114**(C2), C02,009.
- Hayeslip, A., J. Johnson, and G. Baker (2003), Further numerical studies of backscattering from time-evolving nonlinear sea surfaces, *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens.*, **41**(10), 2287–2293.
- Hwang, P. (2009), Comment on A study of the slope probability density function of the ocean waves from radar observations, by D. Hauser et al., *Journal of Geophysical Research-Oceans*, **114**(C2), C02,008.
- Johnson, J., J. Toporkov, and G. Brown (2001), A numerical study of backscattering from time-evolving sea surfaces: comparison of hydrodynamic models, *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens.*, **39**(11), 2411–2420.
- Johnson, J., R. Burkholder, J. Toporkov, D. Lyzenga, and W. Plant (2009), A Numerical Study of the Retrieval of Sea Surface Height Profiles from Low Grazing Angle Radar Data, *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens.*
- Mouche, A. (2007), A simplified asymptotic theory for ocean surface electromagnetic wave scattering, *Waves in Random and Complex Media*, **17**(3), 321–341.
- Mouche, A., B. Chapron, N. Reul, D. Hauser, and Y. Quilfen (2007), Importance of the sea surface curvature to interpret the normalized radar cross section, *Journal of Geophysical Research-Oceans*, **112**(C10), C10,002.
- Nickolaev, N., O. Yordanov, and M. Michalev (1991), Radar backscattering from non-Gaussian sea surface, in *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1991. IGARSS'91. Remote Sensing: Global Monitoring for Earth Management.*, International, vol. 3.
- Nouguier, F., C.-A. Guérin, and B. Chapron (2009), The "choppy wave model" for nonlinear gravity waves, *J. Geophys. Res.*, DOI:10.1029/2008JC004984.
- Papoulis, A. (1965), *Probability, random variables and stochastic processes*, McGraw-Hill.
- Soriano, G., M. Joelson, and M. Saillard (2006), Doppler spectra from a two-dimensional ocean surface at l-band, *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens.*, **44**(9), 2430–2437.
- Tessendorf, J. (2004), Simulating ocean water, <http://www.finelightvisualtechnology.com/docs/coursenotes2004.pdf>, course notes.
- Thompson, D., T. Elfouhaily, and J. Garrison (2005), An improved geometrical optics model for bistatic GPS scattering from the ocean surface, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **43**(12), 2810–2821.
- Voronovich, A. (1994), Small-slope approximation for electromagnetic wave scattering at a rough interface of two dielectric half-spaces, *Waves in Random and Complex Media*, **4**(3), 337–367.
- W.J. Pierson, J. (1961), Models of random seas based on the lagrangian equations of motion, *Tech. rep.*, New York Univ., Coll. of Eng. Res. Div., Dept. of Meteorology and Oceanography, tech. Rep. prepared for the Office of Naval Research under contract Nonr-285(03).
- W.J. Pierson, J. (1962), Perturbation analysis of the navier-stokes equations in lagrangian form with selected linear solutions, *Jour. Geophys. Res. B*, **67**(8).

Bibliographie

- Aberg, S., Wave intensities and slopes in Lagrangian seas, *Advances in Applied Probability*, 39(4), 1020–1035, 2007.
- Abramovitz, M., and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions.*, Dover, New-York, 1970.
- Anguelova, M. D., Complex dielectric constant of sea foam at microwave frequencies, *J. Geophys. Res.*, 113(C08001, doi :10.1029/2007JC004212), 2008.
- Barrick, D., and B. Weber, On the nonlinear theory for gravity waves on the ocean's surface. Part II : Interpretation and applications, *Journal of Physical Oceanography*, 7(1), 11–21, 1977.
- Beckmann, P., and A. Spizzichino, The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces, *New York*, 1963.
- Bondur, V., and E. Sharkov, Statistical properties of whitecaps on a rough sea, *Oceanology*, (English translation), 22(3), 274–279, 1982.
- Bortkovskii, R., Air-sea exchange of heat and moisture during storms (revised english version), *Dordrecht : D. Reidel [Kluwer]*, 1987.
- Bourlier, C., Azimuthal harmonic coefficients of the microwave backscattering from a non-gaussian ocean surface with the first-order ssa model, *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens.*, 42(11), 2600–2611, 2004.
- Bourlier, C., N. Dechamps, and G. Berginc, Comparison of asymptotic backscattering models (SSA, WCA, and LCA) from one-dimensional Gaussian ocean-like surfaces, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(5), 1640–1652, 2005.
- Brown, G., A. Inc, and N. Apex, Backscattering from a Gaussian-distributed perfectly conducting rough surface, *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 26(3), 472–482, 1978.
- Camps, A., et al., The emissivity of foam-covered water surface at L-band : Theoretical modeling and experimental results from the FROG 2003 field experiment, *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, 43(5), 925–937, 2005.
- Chalikov, D., Statistical properties of nonlinear one-dimensional wave fields, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 12(5), 671–689, 2005.
- Chalikov, D., and D. Sheinin, Modeling extreme waves based on equations of potential flow with a free surface, *J. Comp. Phys.*, 210, 247–273, 2005.

- Chan, E., Two-dimensional born-green-yvon and other integral equations, *J. Phys. C : Solid State Phys*, 10, 3477–3486, 1977.
- Clamond, D., On the Lagrangian description of steady surface gravity waves, *Journal of Fluid Mechanics*, 589(doi :10.1017/S0022112007007811), 433–459, 2007.
- Cox, C., and W. Munk, Statistics from the sea surface derived from the sun glitter, *J. Marine Res.*, 13, 198–227, 1954.
- Creamer, D., F. Henyey, R. Schult, and J. Wright, Improved linear representation of ocean surface waves, *J. Fluid Mech.*, 205, 135–161, 1989.
- Dashen, R., and D. Wurmser, Applications of the new scattering formalism : The Dirichlet boundary condition, *Journal of Mathematical Physics*, 32, 997, 1991a.
- Dashen, R., and D. Wurmser, A new theory for scattering from a surface, *Journal of Mathematical Physics*, 32, 971, 1991b.
- Dias, B. T. J., F., The numerical computation of freely propagating time-dependent irrotational water waves, *Fluid Dynamics Research*, 38, 803–830, 2006.
- Duncan, J., An experimental investigation of breaking waves produced by a towed hydrofoil, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, pp. 331–348, 1981.
- Elfouhaily, T., and C.-A. Guérin, A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces, *Waves in Random and Complex Media*, 14(4), 1–40, 2004.
- Elfouhaily, T., B. Chapron, K. Katsaros, and D. Vandemark, A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves, *J. Geophys. Res.*, 102(C7), 15,781–15,796, 1997.
- Elfouhaily, T., D. Thompson, D. Vandemark, and B. Chapron, Weakly nonlinear theory and sea state bias estimation, *J. Geophys. Res.*, 104(C4), 7641–7647, 1999.
- Elfouhaily, T., D. Thompson, D. Vandemark, and B. Chapron, Truncated Hamiltonian versus surface perturbation in nonlinear waves theories, *Waves in Random Media*, 10, 103–116, 2000.
- Elfouhaily, T., S. Guignard, R. Awadallah, and D. Thompson, Local and non-local curvature approximation : a new asymptotic theory for wave scattering, *Waves in Random and Complex Media*, 13(4), 321–337, 2003a.
- Elfouhaily, T., S. Guignard, and D. Thompson, Formal tilt invariance of the local curvature approximation, *Waves in Random and Complex Media*, 13(4), 7–11, 2003b.
- Fournier, A., and W. T. Reeves, A simple model of ocean waves, *Computer Graphics*, 20(4), 75–84, 1986.
- Fructus, D., D. Clamond, J. Grue, and Ø. Kristiansen, An efficient model for three-dimensional surface wave simulations Part I : Free space problems, *Journal of Computational Physics*, 205(2), 665–685, 2005.
- Gerstner, F., Theorie der wellen, *Annalen der Physik*, 32, 1809.

- Guérin, C.-A., G. Soriano, and T. Elfouhaily, Weighted curvature approximation : numerical tests on 2d dielectric surfaces, *Waves in Random Media*, submitted, 2004.
- Hara, T., E. Bock, and D. Lyzenga, In situ measurements of capillary-gravity wave spectra using a scanning laser slope gauge and microwave radars, *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 99(C6), 1994.
- Hasselmann, K., On the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory., *J. Fluid Mech.*, 12, 481–500, 1962.
- Jähne, B., and K. Riemer, Two-dimensional wave number spectra of small-scale water surface waves, *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 95(C7), 1990.
- Joelson, M., and M. Néel, On alpha stable distribution of wind driven water surface wave slope, *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 18, 033,117, 2008.
- Kinsman, B., *Wind Waves : Their Generation and Propagation on the Ocean Surface*, Dover Publications, 2002.
- Kitaigorodskii, S., On the theory of the equilibrium range in the spectrum of wind-generated gravity waves, *Journal of Physical Oceanography*, 13(5), 816–827, 1983.
- Kudryavtsev, V., D. Hauser, G. Caudal, and B. Chapron, A semi-empirical model of the normalized radar cross section of the sea surface, 1. Background model, *J. Geophys. Res.*, 108(C3), 8054, 2003.
- Lamb, H., *Hydrodynamics*, Dover Publications, Cambridge University Press, London, 1932.
- Lindgren, G., Slepian models for the stochastic shape of individual Lagrange sea waves, *Advances in Applied Probability*, 38(2), 430, 2006.
- Longuet-Higgins, M., Mass transport in water waves, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, pp. 535–581, 1953.
- Longuet-Higgins, M., Resonant interactions between two trains of gravity waves, *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 12(03), 321–332, 1962a.
- Longuet-Higgins, M., The effects of non-linearities on statistical distributions in the theory of sea waves, *J. Fluid Mech.*, 17, 459–480, 1963.
- Longuet-Higgins, M., and M. Fox, Theory of the almost-highest wave : the inner solution, *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 80(04), 721–741, 1977.
- Monahan, E., Oceanic whitecaps : Sea surface features detectable via satellite that are indicators of the magnitude of the air-sea gas transfer coefficient, *Journal of Earth System Science*, 111(3), 315–319, 2002.
- Monahan, E., and I. Muircheartaigh, Optimal power-law description of oceanic whitecap coverage dependence on wind speed, *Journal of Physical Oceanography*, 10(12), 2094–2099, 1980.
- Mouche, A., B. Chapron, and N. Reul, A simplified asymptotic theory for ocean surface electromagnetic wave scattering, *Waves in Random and Complex Media*, 17(3), 321–341, 2007a.

- Mouche, A., B. Chapron, N. Reul, D. Hauser, and Y. Quilfen, Importance of the sea surface curvature to interpret the normalized radar cross section, *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 112(C10), C10,002, 2007b.
- Papoulis, A., *Probability, random variables and stochastic processes*, McGraw-Hill, 1965.
- Peake, W., Interaction of electromagnetic waves with some natural surfaces, *Antennas and Propagation, IRE Transactions on*, 7(5), 324–329, 1959.
- Phillips, O., On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude Part 1. The elementary interactions, *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 9(02), 193–217, 1960a.
- Phillips, O., On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude Part 2. Local properties of a random wave fluid, *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 65(10), 3473–3476, 1961a.
- Phillips, O., Spectral and statistical properties of the equilibrium range in wind-generated gravity waves, *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 156, 505–531, 1985.
- Phillips, O., Radar returns from the sea surface Bragg scattering and breaking waves, *Journal of Physical Oceanography*, 18(8), 1065–1074, 1988.
- Pierson, W., Models of random seas based on the lagrangian equations of motion, *Tech. rep.*, New York Univ., Coll. of Eng. Res. Div., Dept. of Meteorology and Oceanography, tech. Rep. prepared for the Office of Naval Research under contract Nonr-285(03), 1961.
- Pierson, W., and P. Fife, Some nonlinear properties of long-crested periodic waves with lengths near 2.44 centimeters, *J. Geophys. Res*, 66, 163–179, 1961.
- Rayleigh, L., *The Theory of Sound 3rd ed*, London : MacMillan, 1896.
- Reul, N., and B. Chapron, A model of sea-foam thickness distribution for passive microwave remote sensing applications, *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 108(C10), 3321, 2003.
- Rosenkranz, P., and D. Staelin, Microwave emissivity of ocean foam and its effect on nadiral radiometric measurements, *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 77(33), 6528–6537, 1972.
- Ruban, V., Water waves over a time-dependent bottom : Exact description for 2D potential flows, *Physics Letters A*, 340(1-4), 194–200, 2005.
- Soriano, G., and C. A. Guerin, A cutoff invariant two-scale model in electromagnetic scattering from sea surfaces, *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 5(2), 199–203, 2008.
- Soriano, G., M. Joelson, and M. Saillard, Doppler spectra from a two-dimensional ocean surface at l-band, *IEEE Trans. Geosci. and Remote Sens.*, 44(9), 2430–2437, 2006.
- Stogryn, A., The emissivity of sea foam at microwave frequencies, in *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1971*, vol. 9, 1971.
- Swift, C., and R. McIntosh, Considerations for microwave remote sensing of ocean-surface salinity, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, pp. 480–491, 1983.

Tayfun, M., Narrow-band nonlinear sea waves, *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 85(C3), 1980.

Tessendorf, J., Simulating ocean water, <http://www.finelightvisualtechnology.com/docs/coursenotes2004>, course notes, 2004.

Thompson, D., T. Elfouhaily, and J. Garrison, An improved geometrical optics model for bistatic GPS scattering from the ocean surface, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 43(12), 2810–2821, 2005.

Tick, L., A non-linear random model of gravity waves, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 8(5), 643–651, 1959.

Toffoli, A., E. Bitner-Gregersen, M. Onorato, and A. Babanin, Wave crest and trough distributions in a broad-banded directional wave field, *Ocean Engineering*, 35(17-18), 1784–1792, 2008.

Ulaby, F., R. Moore, and A. Fung, *Microwave Remote Sensing Volume 1*, Artech House Publishers, 1986.

Valenzuela, G., Theories for the interaction of electromagnetic and oceanic waves-a review, *Boundary-Layer Meteorology*, 13(1), 61–85, 1978.

Vandemark, D., B. Chapron, J. Sun, G. Crescenti, and H. Graber, Ocean wave slope observations using radar backscatter and laser altimeters, *J. Phys. Oceanogr.*, 34, 2825–2842, 2004.

Voronovich, A., Small-slope approximation for electromagnetic wave scattering at a rough interface of two dielectric half-spaces, *Waves in Random and Complex Media*, 4(3), 337–367, 1994a.

Voronovich, A., *Wave scattering from rough surfaces*, Springer, 1994b.

Voronovich, A., and V. Zavorotny, Theoretical model for scattering of radar signals in K u-and C-bands from a rough sea surface with breaking waves, *Waves in Random and Complex Media*, 11(3), 247–269, 2001.

Voronovich, A. G., Small-Slope Approximation in wave scattering from rough surfaces, *Sov. Phys. JETP*, 62(1), 65–70, 1985.

Walsh, E., D. Vandemark, C. Friehe, S. Burns, D. Khelif, R. Swift, and J. Scott, Measuring sea surface mean square slope with a 36-GHz scanning radar altimeter, *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 103(C6), 1998.

Watson, G., *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, 1995.

Watson, K., and B. West, A transport-equation description of nonlinear ocean surface wave interaction, *J. Fluid Mech.*, 10, 815–826, 1975.

Weber, B., and D. Barrick, On the nonlinear theory for gravity waves on the ocean's surface. Part I : Derivations, *Journal of Physical Oceanography*, 7(1), 3–10, 1977.

West, B., and al., A new numerical method for surface hydrodynamics, *J. Geophys. Res.*, C11, 803–824, 1987.

- Wilheit, T., A model for the microwave emissivity of the ocean's surface as a function of wind speed, *IEEE Transactions on Geoscience Electronics*, 17(4), 244–249, 1979.
- Wright, J., A new model for sea clutter, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 16(2), 217–223, 1968.
- Zakharov, V., Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2, 190–194, 1968.
- Zakharov, V., A. Dyachenko, and O. Vasilyev, New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface, *European Journal of Mechanics/B Fluids*, 21(3), 283–291, 2002.
- Zhou, L., L. Tsang, and D. Chen, Polarimetric passive microwave remote sensing of wind vectors with foam-covered rough ocean surfaces, *Radio Science*, 38(4), 1073, 2003.

Diffraction électromagnétique par la surface océanique : influence des nonlinéarités et de l'écume.

Résumé

La première partie de ce document présente un modèle basé sur la résolution des équations Lagrangiennes du mouvement nommé “Choppy Wave Model”. Il permet de tenir compte des nonlinéarités hydrodynamiques de la surface et d'établir une description complète des grandeurs statistiques. Les résultats obtenus soulignent leur caractère non Gaussien et l'importance du spectre déshabillé. Des échantillons de surfaces nonlinéaires illustrent la modulation des petites vagues par les grandes.

L'étude menée en seconde partie quantifie l'impact des nonlinéarités hydrodynamiques sur le phénomène de diffraction et permet de s'affranchir des erreurs dues à l'hypothèse Gaussienne dans l'estimation de paramètres météo-océaniques. Une nouvelle méthode de calcul de l'intégrale de Kirchhoff basée sur des convolutions radiales rapides est aussi introduite. Enfin, l'impact de l'écume en micro-ondes est détaillé et les principaux résultats montrent son importance à forts vents et notamment en polarisation HH.

Mots clés Modélisation hydrodynamique, vagues de gravité nonlinéaires, propagation d'onde, surfaces rugueuses, spectre déshabillé, diffraction électromagnétique, télédétection, observations océaniques, écume.

Scattering from sea surface : Impact of foam and hydrodynamic nonlinearities.

Abstract

The first part of this document introduces a simple model based on the resolution of the Lagrangian equations of motion termed “Choppy Wave Model”. It takes into account the hydrodynamic nonlinearities of the surface and makes possible to establish its complete statistical properties. The obtained results emphasize the nongaussian aspect of the ocean surface and the importance of the undressed spectrum. Some samples of nonlinear seas illustrate the hydrodynamic modulation of short waves by the long ones.

In the second part, the impact of sea surface nonlinearities on the scattering process is quantified. The obtained results correct the bias due to the Gaussian assumption in meteorological-oceanic parameters estimation. A new calculation method for the Kirchhoff integral based on fast radial convolutions is also introduced. Finally, the foam impact on the scattering process in micro-waves is estimated and is shown to become significant at strong winds and mainly in HH polarization.

Keywords Hydrodynamic modeling, nonlinear gravity waves, wave propagation, rough surfaces, undressed spectrum, scattering, remote sensing, ocean observations, foam.

Institut Fresnel (UMR CNRS 6133) - Universités Aix-Marseille
Campus de Saint Jérôme, av. Escadrille Normandie 13397 Marseille Cedex 20, France

Laboratoire d'Océanographie Spatiale
Centre de Brest, IFREMER, 29280 Plouzané, France